Die
Steinersche Hypocykloide.

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen philosophischen Fakultät der Universität Jena

vorgelegt von

MAX ROEGNER.

Oppeln.
Druck von Erdmann Raabe.
1908.

Genehmigt von der philosophischen Fakultät der Universität Jena auf Antrag des Herrn Professor Dr. Haussner.

Jena, den 2. März 1908.

Geheimer Hofrat Professor Dr. Winkelmann,
d. Zt. Dekan.

MEINEM LIEBEN FREUNDE

ERNST SCHERFF

GEWIDMET.

Inhalt.

Einleitung.

Die dreispitzige Hypocykloide ist eine Kurve, die wegen ihrer vielen schönen Eigenschaften häufig zum Gegenstande eingehender Untersuchungen gemacht worden ist.

Insbesondere seit *J. Steiner* durch seinen Vortrag in der physikalisch-mathematischen Klasse der Akademie zu Berlin am 7. Januar 1856 — abgedruckt in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 56 (1857), S. 231 — **„Über eine besondere Kurve dritter Klasse und vierten Grades“** (gesammelte Werke, Band 2, S. 639) die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diese Kurve lenkte, ist eine grosse Zahl von „Abhandlungen“, „Noten“ u. s. w. in vielen Fachzeitschriften des In- und Auslandes, auch eine Reihe von Dissertationen und Schulprogrammen erschienen.

Dementsprechend sind die Untersuchungen von sehr verschiedenen Gesichtspunkten aus geführt worden. Dieses umfangreiche Material historisch und kritisch zu sichten und ein systematisch zusammenhängendes Bild der verschiedenen Untersuchungsmethoden zu geben, ist die Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Als Quellen für Litteraturnachweise haben gedient:

1. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*
2. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. 3, D4, 1903, Art. Rollkurven.* (Scheffers).
3. *E. Wölffing,* Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den cyklischen Kurven, Biblioth. math. (3) Bd. 2, S. 235—259. L'Interm. 5 (1898) p. 160. 6 (1899) p. 11—12.
4. *G. Loria,* Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1902.
5. *E. Pascal,* Repertorium der höheren Mathematik, Bd. 2 (S. 547), Leipzig 1902.

1. Kapitel.

Die wichtigsten Erzeugungsweisen.

Es erscheint zweckmässig, zur rascheren Orientierung die wichtigsten Erzeugungsarten der Kurve voranzustellen, deren man im wesentlichen drei Hauptgruppen (A, B, C) unterscheiden kann.

§ 1.

Die älteste und am meisten bekannte Erzeugung der Epi- und Hypocykloiden ist die durch Rollen eines beweglichen Kreises vom Radius $\pm r$ auf der Aussen- bzw. Innenseite eines festen Kreises vom Radius R, wobei ein Punkt P im Abstand h vom Mittelpunkt des beweglichen Kreises die Bahn beschreibt. Durch Spezialisierung $R = 3r$, $h = r$ ergibt sich: *Wenn ein Kreis vom Radius* r *auf der Innenseite eines Kreises vom Radius* 3r *(ohne zu gleiten) rollt, so beschreibt ein Punkt* P *der Peripherie des rollenden Kreises die dreispitzige Hypocykloide. (Fig. 1.)* **A. I. a.**

Die Erzeugung durch Rollen ist noch auf eine zweite Weise möglich, wie schon *de la Hire*[1]) und *Euler*[2]) gefunden haben. Wir erhalten nämlich dieselbe Kurve für die Basis 3r, wenn der Radius des rollenden Kreises 2r beträgt. Es ist nach *F. Schilling*[3]) ein Fall des „bedeckten Zentrums": Der Mittelpunkt des festen Kreises wird von dem rollenden Kreise, den man sich als Scheibe denkt, bedeckt (im vorigen Falle hatten wir „freies Zentrum"). **I. b.**

---

1) Mém. d. math. et phys. Paris 1694 p. 10—47.

2) Acta Acad. Sc. Jm. Petropol. 1781 I p. 48.

3) [I.] Ztschrft. f. Math. u. Phys. 44 (1899) p. 214—227 u. 51. (Die Ziffern in eckiger Klammer beziehen sich auf verschiedene Arbeiten desselben Verfassers).

§ 2.

II. Die der Erzeugung durch Rollen nächst verwandte ist die von *Verdam*[1]) *(Böklen)*[2]) wohl zuerst bemerkte, dann aber besonders von *G. Bellermann*[3]) als Ausgangspunkt benutzte Erzeugung mit Hilfe eines Gelenkparallelogramms (Fig. 2). *Bellermann* stellt die Aufgabe: „Es sei ein Parallelogramm OFPS′ gegeben[4]), dessen Seiten konstante Längen haben, $OF = b'$, $OS' = b$, aber um ihre Eckpunkte drehbar sind. Wir denken uns den Punkt O fest und lassen die Punkte F und S′ sich mit gleichmässigen, aber von einander verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten q und q′ um O drehen und stellen die Frage auf, welche Kurve von dem Punkte P beschrieben wird“. Für den uns interessierenden speziellen Fall ergeben sich aus den allgemeinen Formeln folgende Verhältnisse (wie sie Figur 2 veranschaulichen soll). Setzt man $OF = 2r$, $OS' = r$ und lässt OS′ sich mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit drehen wie OF und in entgegengesetztem Sinne, so beschreibt die vierte Ecke P des Parallelogramms OFPS′ die dreispitzige Hypocykloide.

§ 3.

III. a. Hieraus kann man wiederum leicht zu einer neuen Erzeugungsweise gelangen, wenn man in Fig. 2 die Verbindungslinie der Punkte M und S betrachtet. Ist M der Schnittpunkt des Stabes $OF = 2r$ mit dem Kreise r (O), S′ der dem Endpunkte des anderen Stabes $OS' = r$ im Kreise r (O) diametral gegenüber liegende Punkt, dann folgt aus der Bewegung des Parallelogramms zugleich, dass sich die Punkte M und S auf demselben Kreise r (O) in entgegengesetzten Richtungen und zwar S doppelt so schnell wie M, bewegen; ihre Verbindungslinie SM hüllt unsere Kurve ein. Wir werden später sehen, dass P der Berührungspunkt und $SM = MP$ ist.

---

[1]) Archiv der Math. (1) 11 (1848) p. 13—25.

[2]) Arch. d. Math. (1) 37 (1861) p. 118—123, vgl. Seite 21.

[3]) Epicykloiden und Hypocykloiden, Dissert. Jena 1867.

[4]) Die Bezeichnung ist zur besseren Übersicht durchweg einheitlich: Punkte grosse Buchstaben, Strecken kleine, Kurven 2ten Grades C^2, K^2 . . . u. s. w. (teilweise an Steiner angelehnt).

Diese Erzeugungsweise ist, um es gleich hier anzuführen, in etwas anderer Form und allgemeiner schon von *J. Steiner*[1]) angegeben worden.

Eine Modifikation hiervon haben *G. Bellermann*[2]) und *F. Eckardt*[3]) angegeben. Gehen wir gleich auf den besonderen Fall ein, so ist die Hypocykloide auch der Ort der Mittelpunkte der Verbindungslinie zweier Punkte (Fig. 3), die sich auf zwei konzentrischen Kreisen (2r) und (4r) mit gleichen Geschwindigkeiten und in entgegengesetzten Richtungen bewegen. Aus der Entstehung ist leicht zu beweisen und aus Fig. 3 sofort zu ersehen, dass der Bogen $2 A_1 M = S' A_1 = LS$ ist, d. h. SM ist wieder Tangente und damit dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt. **III. b.**

Es ist wichtig, diese Eigenschaft zu beachten; denn viele Beweise, dass die aus anderen Erzeugungsarten entstandenen Hypocykloiden mit der Steinerschen Hypocykloide identisch sind, stützen sich auf den Nachweis, dass die Tangente PMS mit einer Anfangslage AL auf dem Kreise r(O) zwei Bogen abschneidet, zwischen denen obige Beziehung $LS = 2 A_1 M$ besteht. Man kann diese Eigenschaft wohl als die Kardinaleigenschaft der Hypocykloide bezeichnen, und von dem Kreise (r) mit dem Mittelpunkt O, den wir von nun an stets mit C^2 bezeichnen wollen, werden wir sehen, dass er eine wichtige Rolle in der Theorie unserer Kurve spielt; er ist mit der Hypocykloide konzentrisch und ihr eingeschrieben und weiter ist er der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks ABC, von dem *Steiner* ausgeht.

§ 4.

Wenden wir uns nun zu der *Steinerschen* Erzeugung (Fig. 4 u. bes. Fig. 14): „*Fällt man aus jedem Punkte in der dem Dreieck* ABC *umschriebenen Kreislinie Perpendikel, so liegen die je drei Fusspunkte allemal in irgend einer Geraden* g **B.IV.a.**

[1]) Am Schlusse der gen. Abhandlung. Vgl. Anhang.

[2]) Dissert. Jena 1867.

[3]) Ztschr. f. Math. u. Phys. 18 (1873) p. 322.

und die Enveloppe aller dieser Geraden ist eine Kurve dritter Klasse und vierten Grades $C_3{}^4$, *welche die im Unendlichen liegende Gerade* g_∞ *zur ideellen Doppeltangente hat*".[1])

IV. b. Bezüglich der verschiedenen Modifikationen der Erzeugung IVa verweisen wir auf das zweite Kapitel.

§ 5.

C. V. a. Aus der Reihe der Erzeugungsarten der Kurve mit Hilfe von Kegelschnitten wollen wir als Beispiel den Fall anführen, der einen unmittelbaren interessanten Vergleich mit der dann sogleich anzugebenden Erzeugungsweise gestattet.

Man erhält die $C_3{}^4$ auch als Enveloppe der Achsen der Parabeln, Fig. 4 u. 5, welche einem Dreieck $A_1 B_1 C_1$ (dem zu ABC parallel eingeschriebenen) eingeschrieben werden können. Die endlichen Brennpunkte liegen auf dem $A_1 B_1 C_1$ umschriebenen Kreise (C^2, der also der schon genannte Feuerbachsche Kreis von ABC ist).

Ist M ein solcher Brennpunkt, so geht die Axe durch M und ist parallel $A_1 M'$, wenn $A_1 M'$ der andere (unendl.) Brennstrahl ist; zugleich teilt $A_1 A_1'$, welche Winkelhalbierende des Dreiecks $B_1 A_1 C_1$ ist, den von den Brennstrahlen $A_1 M$ u. $A_1 M'$ gebildeten Winkel in zwei gleiche Teile.

V. b. Betrachten wir nun daneben die zuerst von *H. Schröter* [2]) angegebene Erzeugung der Kurve als projektives Gebilde:

---

[1]) Man nennt die Gerade g gewöhnlich die Simsonsche: In den Annales de math. de Gergonne 1813 Band 4 S. 251 findet man den Satz von *Servois* „Les pieds perpendiculaires abaissées sur les directions des côtés d'un triangle d'un point quelconque de la circonférence du cercle qui lui est circonscrit, sont tous trois sur une même ligne droite. La méthode qui vient d'être indiquée plus haut, ... réponse sur *ce théorême qui est,* je crois, *de Simson.*" Indessen hat *Mackay* in einer Untersuchung über die Fusspunktlinien in den Edinbg. Math. Soc. Proc. Bd. 9 (1891) S. 83—91 festgestellt, dass *Wallace* der erste Entdecker dieser Linie ist und zwar in Leytowens Math. Repository (old. series) Bd. 2 S. III. Eine grosse Zahl von Sätzen über die Wallacesche Gerade, zugleich mit ihrer Geschichte, findet man in Edinbg. Math. Soc. Proc. Bd. 3 (1885) S. 77—93, zusammengestellt von *John Alison.*

[2]) Crelle, J. f. d. r. u. a. Math. 54 (1857) p. 31.

„*Durch einen Punkt* A_1 *eines Kreises* C^2 *geht ein fester Strahl* $A_1 A_1'$ *und ein beweglicher Strahl* $A_1 M$, *welcher in* M *den Kreis zum anderen Male trifft. Trägt man den Winkel* $M A_1 A_1'$ *an den Schenkel* $A_1 A_1'$ *entgegengesetzt an, so dass der andere Schenkel* $A_1 M'$ *dieselbe Neigung zu* $A_1 A_1'$ *hat, wie* $A_1 M$ *zu* $A_1 A_1'$ *und zieht man dann durch den Punkt* M *eine Parallele zu* $A_1 M'$, *so wird dieselbe Kurve dritter Klasse* $C_3{}^4$ *eingehüllt, während der Punkt* M *den Kreis durchläuft.*" Wir kommen später genauer darauf zurück, bemerken nur noch, dass man im Falle a. und im Falle b. die Punktreihe M des Kreises C^2 und die Punktreihe M' (N) der unendlichfernen Geraden als zueinander projektiv betrachten kann.

2. Kapitel.

Untersuchungsmethoden, Haupteigenschaften der Kurve.

Nachdem wir im ersten Teil aus den Haupterzeugungsarten einen kurzen Überblick gewonnen haben, wollen wir nun zusehen, wie auf den verschiedensten Wegen die Eigenschaften unserer Kurve allmählich aufgedeckt worden sind. Um die vielseitigen Betrachtungen übersichtlich zu ordnen, wollen wir sie jeweilig an die Erzeugungsweisen anknüpfen, und zwar der Hauptsache nach in der im ersten Teil angedeuteten Reihenfolge. Das historische Moment tritt demnach in der Allgemeinheit zurück, findet jedoch immer innerhalb der einzelnen Paragraphen die notwendige Berücksichtigung.

§ 1.

Die cyklischen Kurven waren bereits im Altertum **A. I.**
bekannt (Ptolemäisches Weltsystem). Ihr Studium ist dann **a. u. b.**
wieder aufgenommen worden um die Mitte des 16. Jahrhunderts und ist verknüpft mit den Namen *Albrecht Dürer, Toricelli, Viviani, Desargues, Descartes, Ol. Römer, de la Hire, Newton, Euler* (vgl. *Cantor,* Gesch. d. Math.). Eine neue Periode beginnt

etwa 1856 mit einem Buche von *Weissenborn*,[1]) in dem zuerst die dreispitzige Hypocykloide ausdrücklich erwähnt wird.

Es ist noch zu bemerken, dass sehr viele der angeführten Sätze von den Autoren allgemein für cyklische Kurven ausgesprochen worden sind, und dass hier in solchen Fällen natürlich nur die betreffende spezielle Anwendung gegeben wird.

Das Buch von *Weissenborn* dürfte ungefähr den Stand der Kenntnisse von den cyklischen Kurven um jene Zeit darstellen — auf Mängel, die sich darin finden (Pericykloiden etc.), ist hier nicht der Ort einzugehen —, und liefert uns folgendes Bild. Unsere Kurve entsteht also auf die im ersten Kapitel angegebene Weise (Fig. 6) durch einen rollenden Kreis vom Radius r (für die Rechnung in allgemeinen Formeln hat r negatives Vorzeichen) und einen festen Kreis vom Radius 3r. Nun begegnen wir hier schon zwei Auffassungen in Bezug auf die Bewegung. Ist der Kreis mit dem Radius 3r (O) fest, dann hat der andere Kreis zwei Bewegungen: eine fortschreitende und eine rotierende, es kann aber die Kurve natürlich eben so erzeugt werden, wenn man jedem der beiden Kreise eine rotierende Bewegung um seinen Mittelpunkt erteilt. Dieser Umstand hat Bedeutung für die Mechanik (worüber man näheres findet in *Chasles,* Gesch. der Geometrie, übersetzt von Sohnke, Halle 1839 S. 121).

Legen wir den Betrachtungen die erste Erzeugung zu Grunde, dann kann man sagen, dass die Kurve vollständig beschrieben ist, wenn der rollende Kreis seinen Umfang dreimal auf dem des festen Kreises abgewickelt hat, denn dann ist er in seine Anfangslage zurückgekehrt. Den Winkel, den die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte OF mit der Anfangslage Ox bildet, nennen wir mit *Weissenborn* den Distanzwinkel ϑ; den Winkel, welchen die Verlängerung von OF mit FP bildet, wenn P der beschreibende Punkt ist, nennen wir den Wälzungswinkel ω. Es ergibt sich leicht, dass $\omega = -3\vartheta$ ist. Das negative Zeichen bedeutet dabei, dass ω im entgegengesetzten Sinne wie ϑ aus

[1]) Die cyklischen Kurven, Eisenach 1856.

der Anfangslage entsteht. (Fig. 6). Daraus folgt die Konstruktion eines beliebigen Punktes der Hypocykloide: Wenn das Axenkreuz Ox, Oy und die beiden konzentrischen Kreise C^2 und (3r) gegeben sind, so zieht man irgend einen Radius OT von (3r), der den Kreis C^2 in M schneidet, beschreibt um F, die Mitte von MT, den rollenden Kreis und macht nun auf diesem den Bogen TP dreimal so gross wie den entsprechenden, auf C^2 von M und dem Schnittpunkt mit Ox begrenzten Bogen. *Weissenborn* gibt eine Konstruktion, die den Kreis OF = 2r und den rollenden Kreis benutzt, sie beruht auf derselben Relation $3\vartheta = -\omega$ (vgl. auch *Schlömilch* pag 11, fig 7 und Text pag 87, fig 1).

Die Gleichungen der Hypocykloide, deren sehr einfache Ableitung sich in vielen Lehrbüchern und Aufgabensammlungen findet, lassen sich unter Zugrundelegung des in Fig. 6 angegebenen Koordinatensystems (die x-Axe geht durch eine Spitze) und unter Beibehaltung derselben Bezeichnungen folgendermassen schreiben:

$$x = 2r \cos \vartheta + r \cos 2\vartheta$$
$$y = 2r \sin \vartheta - r \sin 2\vartheta$$

Ebenso gut könnte man auch den Winkel ω einführen, wie es z. T. geschehen ist, doch sind unsere Gleichungen für die Rechnung bequemer.

Daraus kann man zur Bestimmung der Tangente und Normale folgende Formeln ableiten: $\operatorname{tg} \tau = -\frac{R \sin \vartheta - y}{R \cos \vartheta - x}$, bzw. $= +\frac{R \cos \vartheta - x}{R \sin \vartheta - y}$. Zieht man nämlich in Fig. 6 durch P die Parallele zur y-Axe und durch T die Parallele zur x-Axe, so schneiden sich diese beiden Linien in Q; bezeichnet man ferner den Fusspunkt QP auf der x-Axe mit Q_0, den des Lotes von T auf die x-Axe mit T_0, dann ist $QT = OT_0 - OQ_0 = R \cos \vartheta - x$ und $QP = TT_0 - Q_0P = R \sin \vartheta - y$, also die Linie PT Normale und PM Tangente. Diese einfache Eigenschaft können wir so aussprechen: Die Normale geht durch den Berührungspunkt des festen und des rollenden Kreises und die Tangente durch den diesem auf dem wälzenden

Kreise diametral gegenüber liegenden Punkt. Die auf der Infinitesimalrechnung beruhende Ausführung der Rektifikation und Quadratur führt zu dem Resultat: Die Länge der Kurve beträgt **16 r** und ihr Inhalt **2** $r^2\pi$. . . . (vergl. auch *Balitrand* [1])).

Mit Hilfe der Infinitesimalrechnung wird ferner auch der Krümmungshalbmesser bestimmt, und es ergiebt sich folgendes einfache Resultat: Man verbindet den Mittelpunkt O mit dem in dem rollenden Kreise P diametral gegenüberliegenden Punkte P′. Der Schnittpunkt dieser Linie mit der Normale in P ist der gesuchte Punkt K, d. h. KP ist der Krümmungshalbmesser. Es lässt sich leicht zeigen, dass der Ort von K eine ebensolche dreispitzige Hypocykloide ist, wie die ursprüngliche und mit dieser konzentrisch, nur einem Kreise vom Radius 9 r eingeschrieben; ihre Scheitel hat sie in den Spitzen der ersten.

Wie wir im ersten Kapitel sahen, wird dieselbe Kurve erzeugt, wenn der Radius des rollenden Kreises 2 r statt r beträgt. Diese doppelte Erzeugung kannten schon *de la Hire* und *Euler*.

Weissenborn gibt einen einfachen analytischen Beweis dafür durch Einsetzen des neuen Wertes in die Gleichungen der Kurve. Es ergibt sich der allgemeine Satz, dass die Summe der drei Radien: des festen und der beiden rollenden gleich O ist. Auch bei *Magnus* [2]) findet sich der Satz schon bewiesen, wo er so lautet: Jede Hypocykloide, welche durch einen Kreis erzeugt wird, dessen Radius $r < R$ ist, ist gleich einer zweiten Hypocykloide, welche auf derselben Basis von einem Kreise erzeugt wird, dessen Radius die Differenz der Radien $R - r$ ist, (in unserem Falle gleich 2 r).

Unter Hinweis auf das „*Klügel*sche mathematische Wörterbuch“ gibt *Weissenborn* noch eine Entwicklung derselben Resultate mit Hilfe des Begriffs des Geschwindigkeit Im ganzen hat das Buch von *Weissenborn* heute nur noch historisches Interesse. Der unter der Überschrift „geometrische Eigenschaften“ an-

---

[1]) Journal de Longchamps 1893 p. 75.

[2]) Sammlung von Aufg. d. anal. Geom. Berlin 1833.

gegebenen Fusspunktkurve haben wir am Schluss noch zu gedenken.

Das aus derselben Zeit stammende Buch von *W. Zehme*[1]) zeichnet sich durch einen Abschnitt über „harmonische Beziehungen“ aus, die neu sind. Wir heben folgenden grundlegenden Satz hervor: Verlängert man (Fig. 6) die Linie KTP bis zum Schnitt J mit dem festen Kreise, so sind die vier Punkte K, P und T, J harmonische, denn da K der Krümmungsmittelpunkt ist, der zu P gehört, so verhält sich KJ : KT = (R — r) : r (in diesem Falle wie 2 : 1). Ferner geht aus der Ähnlichkeit der Dreiecke PTF und JTO die Proportion hervor: PJ : PT = FO : FT = R — r : r = 2 : 1 folglich PJ : PT = KJ : KT. Erwähnenswert ist seine „Gegenhypocykloide“, das ist die um 180^0 gegen die erste gedrehte; wir werden noch auf sie zurückkommen; wenn auch der Name in der ganzen späteren Litteratur nicht mehr vorkommt, so ist es doch zu empfehlen, ihn beizubehalten, weil er bequem ist. Eine ziemlich einfache Konstruktion der cyklischen Kurven und ihrer Evoluten hat *O. Schlömilch*[2]) gegeben, wovon Fig. 7 eine Anwendung ist: Man zeichnet die drei in O koncentrischen Kreise (r), (2 r), (3 r) und teilt die Bogen zwischen einem Sektor von 60^0 je in n gleiche Teile. Um den Punkt F, den Schnittpunkt der einen Begrenzungslinie des Sektors mit dem Kreise (2 r), schlägt man den Kreis mit dem Radius r, den wälzenden Kreis, und teilt seinen Halbkreisbogen von T_0 bis M_0 ebenfalls in n gleiche Teile. Schlägt man dann um jeden weiteren Punkt F_1, F_2 . . . F_n auf dem Kreise (2 r) die Kreise (F) mit den Radien r und mit den zugehörigen Sehnen TT_1', TT_2', TT_3' . . . . um die ensprechenden Punkte M_1, M_2 . . . . . M_n Kreise, so sind ihre Schnittpunkte mit den Kreisen (F) Punkte der Hypocykloide. Nun braucht man nur diese immer mit den zugehörigen Punkten T_1, T_2 . . . . T_n zu verbinden, um auch die Normalen und damit den entsprechenden Teil der Evolute

---

[1]) Elem. u. anal. Behdlg. d. Cykloiden. Iserlohn u. Elberfeld 1854.

[2]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 2 (1857) p. 330—334.

zu erhalten. Fährt man so fort für alle Sektoren, so erhält man die ganze Kurve. Dass dies Verfahren richtig ist, geht aus dem angeführten Satze von *Weissenborn* hervor.

Der aus *Schlömilchs* Kompendium der höheren Analysis XIV § 64 entnommene Satz: „Die Scheiteltangente schliesst mit der Senkrechten, welche auf sie aus einem Endpunkte einer zu ihr parallelen Cykloidensehne gefällt wird, ein Flächenstück ein, das halb so gross ist, als der zwischen der Scheiteltangente und jener Sehne liegende Abschnitt des Rollkreises", wird in einem kurzem Artikel von *C. W. Baur* [1]) auch allgemein für Epi- und Hypocykloiden analytisch bewiesen.

Aus geometrischen Betrachtungen, auf die wir aus einem anderen Grunde später noch zurückkommen werden, gewinnt *O. Böklen* [2]) einen einfachen Beweis des folgenden Satzes: Wenn man einen Ast der Hypocykloide auf einer seiner Tangenten im Endpunkte rollt, so beschreibt der Mittelpunkt des festen Kreises, indem er der Bewegung folgt, eine halbe Ellipse. Dieselbe ist nach einem Steinerschen Satze so lang wie die Fusspunktkurve der Hypocykloide, wenn die Perpendikel auf die Tangenten von ihrem Mittelpunkte aus gefällt werden; genannte Fusspunktkurve ist selbst wieder eine verlängerte Hypocykloide. (Die Fusspunktkurven s. 4. Kapitel).

Eine ausführliche allgemeine Behandlung der cyklischen Kurven finden wir in der Dissertation von *S. H. Gildemeister* [3]). Hier treffen wir die wichtigsten z. T. bekannten Resultate an, so auch die Gleichung, der dreispitzigen Hypocykloide in cartesischen Koordinaten:

$$(x^2 + y^2)^2 + 8xy\,(3x^2 - y^2) + 18\,(x^2 + y^2) = 27\,r^4$$

Hinzu kommen noch Untersuchungen über grösste und kleinste Werte der Koordinaten bei den verschiedenen Kurvenformen. Für unseren Fall liegen die Beziehungen recht einfach und sind schon aus der Anschauung leicht zu entnehmen. Wir brauchen daher darauf nicht weiter einzugehen. Für die

---

1) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 4 (1859) p. 311—312.

2) Arch. d. Math. (1) 37 (1861) 118—123.

3) De lineis curvis Epicycloidibus et Hypocycloidibus, Dissert. Marburg 1866.

dreispitzige Hypocykloide findet man sie übrigens spezialisiert in der Dissertation von *Tschumi*[1]), bei *Loria* und anderwärts. Der Wert der *Gildemeister*schen Arbeit liegt darin, dass sie in ganz allgemeiner Weise das Problem der cyklischen Kurven behandelt. Auch die doppelte Erzeugung wird erwähnt.

Auf zwei kleinere Arbeiten von *Hennig* und von *Fouret* kommen wir noch zu sprechen. *R. Hennig*[2]) gibt einen geometrischen Beweis für den Satz, dass die Verbindungslinie des Mittelpunktes O des Grundkreises mit P′, dem Gegenpunkte von P, die Normale im Krümmungsmittelpunkte schneidet. Der Beweis hat Ähnlichkeit mit dem von *Zehme* gegebenen.

Von *Fouret*[3]) wären zwei Arbeiten zu nennen. Jedoch enthält die erste [I.] nur eine etwas modificierte Darstellung der Erzeugung ähnlich der zweiten von *Weissenborn* angegebenen: Man kann sich die Hypocykloide auch beschrieben denken durch einen Punkt P. P durchläuft einen Kreis mit dem Mittelpunkt F und dem Radius r, während dieser Kreis um einen festen Punkt O sich dreht, indem sein Mittelpunkt einen Kreis (2 r) um O beschreibt. Dabei sind die Winkel, um die P und F sich gleichzeitig drehen, stets proportional. Die andere Arbeit [II.] ist wichtig für die allgemeine Theorie der cyklischen Kurven wegen des Beweises für die Möglichkeit der doppelten Erzeugung. Ausführlicher werden speziell die Epi- und Hypocykloiden behandelt in der Dissertation von *J. van Hengel*[4]). Es werden die bekannten Resultate analytisch entwickelt auch mit Berücksichtigung der doppelten Erzeugung durch Rollen. Als neu zu erwähnen sind die analytischen Berechnungen der Grösse von Tangente, Normale, Subtangente, Subnormale, wofür sich in unserem Falle

---

1) Ein Beitrag zur Geschichte und Diskussion der Cykloiden, Dissert. Bern 1892.

2) Crelle, J. f. d. r. u. a. Math. 65 (1866) p. 52—61.

3) Nouv. Ann. (2) 8 (1869) p. 162. [I]
L'Inst., J. univ. d. Sc. Soc. Phil. 36 (1868) I p. 182. [II]

4) Über Cykloiden Dissert. Rostock 1870.

folgende Werte ergeben. Die Gleichung der Tangente lautet $y - y' = -\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}(x - x')$; ihre Länge wird ausgedrückt durch $y \cdot \sec\frac{\vartheta}{2}$, die der Normalen durch $y \cdot \operatorname{cosec}\frac{\vartheta}{2}$, der Subtangente und Subnormale durch $-y \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$ und $y \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$.

Interessant sind folgende Beziehungen: Fällt man vom Koordinatenanfangspunkte das Lot auf eine Tangente, so ist seine Länge $p = r \sin\frac{3\vartheta}{2}$, die Strecke der Tangente vom Fusspunkte des Lotes bis zum Berührungspunkte der Tangente ist $m = 3r\cos\frac{3\vartheta}{2}$, wobei immer ϑ den Distanzwinkel bedeutet, wie wir ihn am Anfange eingeführt haben. Diese Eigenschaft liefert ein einfaches Mittel zur Konstruktion der Tangente. Es sei noch erwähnt, dass eine Inhaltsberechnung auf dem Wege der Infinitesimalrechnung gegeben wird. *I. van Hengel* stellt ferner die Gleichung der Hypocykloide auch in cartesischen Koordinaten auf.

Mit einer Arbeit von *L. Painvain*[1]) beginnt eine lange Reihe von speziellen Abhandlungen über die dreispitzige Hypocykloide in den Nouvelles Annales. Wir werden sie im Laufe der Betrachtungen, in den verschiedenen Abschnitten verstreut, kennen lernen. Selbst die vorliegende wird nicht als Ganzes hier besprochen, sondern gemäss ihrem Inhalte und der getroffenen Disposition auf die verschiedenen Kapitel verteilt werden.

Painvain gibt selbst an, dass seine Arbeit durch die von *Cremona* veranlasst ist, die wir später kennen lernen werden. Er will analytisch die Sätze von *Cremona* beweisen, die dieser aus gänzlich anderen Gesichtspunkten entwickelt hat. Wir sprechen aber von der *Painvain*schen Arbeit schon an dieser Stelle, weil in ihr als Ausgangspunkt der Betrachtungen ebenfalls die Erzeugung durch Rollen gewählt ist.

---

[1]) Nouv. Ann. (2) 9 (1870) p. 202 u. 256.

Zunächst werden bekannte Sätze entwickelt. Als neu interessiert uns eine andere Form der Gleichung der Tangente $x \cdot \sin\frac{\vartheta}{2} + y \cdot \cos\frac{\vartheta}{2} = r \sin\frac{3\vartheta}{2}$. Die Gleichung der Hypocykloide wird in der schon bekannten Form auch in cartesischen Koordinaten gegeben. Hieraus werden die wichtigsten Eigenschaften entwickelt: dass die drei Rückkehrpunkte auf dem Kreise mit dem Radius 3 r liegen; dass sie ein gleichseitiges Dreieck bilden; dass durch die drei Rückkehrpunkte drei Rückkehrtangenten geben, die sich in einem Punkte schneiden und zwar im Mittelpunkt O des festen Kreises und dass sie Symmetrieaxen sind; dass die Kurve von der vierten Ordnung und der dritten Klasse ist u. s. w. Der der Hypocykloide umschriebene Kreis vom Radius 3 r wird „cercle directeur", Richtkreis genannt; und da sich der Name in der Litteratur in diesem Sinne öfter angewendet findet, wollen wir ihn zur bequemen Verständigung beibehalten. Die Hypocykloide besitzt keine Wendepunkte und eine einzige Doppeltangente, die die unendlich ferne Gerade ist und deren Berührungspunkte die unendlich fernen Kreispunkte sind.

In einer Arbeit von *A. Vietor* [1]) ist eine Einteilung der cyklischen Kurven gegeben, die aber für uns nicht in Betracht kommt. Dagegen ist hervorzuheben, dass sich zwei Beweise, ein kinematischer und ein analytischer, für die doppelte Erzeugung finden. Letzterer ist schon mehrfach geleistet worden; der erstere beruht auf geometrischen Betrachtungen bei einer beliebigen Lage der rollenden Kreise: Die von beiden Kreisen (r) und (2 r) beschriebene Bahn ist dieselbe, wenn die bekannte Beziehung zwischen den Radien besteht, dass die Summe der Radien der Rollkreise und des festen Kreises gleich Null ist.

In *Salmons* „Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven" [2]) findet man in der unter den Beispielen gegebenen Notiz über die dreispitzige Hypocykloide kein neues Resultat.

[1]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 25 (1880) p. 263—71.

[2]) 2. Auflage, pag. 371.

Doch ist eine Methode zur Bestimmung der Gleichung in cartesischen Koordinaten angegeben. Wir kommen an späterer Stelle noch einmal auf dieses Buch zu sprechen.

Eine neue ziemlich ausführliche Theorie der cyklischen Kurven als Rollkurven hat dann *E. Holst*[1]) gegeben, mit dem besonderen Zwecke der Bestimmung der Plückerschen Zahlen. Zur Bestimmung der Klasse z. B. geht *Holst* von dem bekannten Satze aus, dass die Normale im beschreibenden Punkte durch den Berührungspunkt des festen und des rollenden Kreises geht. Wenn diese Normale mit der x-Axe den Winkel u bildet,

so ist $\operatorname{tg} u = \dfrac{r \sin \vartheta + p \sin \dfrac{R' + r'}{r'} \vartheta}{r \cos \vartheta + h \cos \dfrac{R' + r'}{r'} \vartheta}$, wobei $R' = 3$ und $r' = 1$ die Masszahlen der Radien der genannten beiden Kreise sind. Dies ergibt für unseren Fall: $\operatorname{tg} u = \dfrac{\sin \vartheta - \sin 2 \vartheta}{\cos \vartheta + \cos 2 \vartheta}$.

Der Richtungskoefficient k einer beliebigen Geraden, der P mit einem festen Punkte (x_1, y_1) verbindet, ist $k = \dfrac{2r \sin \vartheta - r \sin 2\vartheta - y_1}{2r \cos \vartheta + r \cos 2\vartheta - x_1}$.

Wenn diese Gerade eine Tangente ist, so hat man folglich $k \cdot \operatorname{tg} u = -1$, oder $[2r \cos \vartheta + r \cos 2\vartheta - x_1]\, r (\cos \vartheta + r \cos 2\vartheta) + [2r \sin \vartheta - r \sin 2\vartheta - y_1]\, r (\sin \vartheta - \sin 2\vartheta) = 0$.

Führt man das weiter aus, indem man $\cos \vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$, $\sin \vartheta = \dfrac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2}$ und $e^{\frac{i\vartheta}{r}} = \alpha$ setzt, so erhält man eine allgemeine Gleichung, die aber wegen unseres besonderen Falles, dass der beschreibende Punkt auf der Peripherie des rollenden Kreises liegt, sehr einfach wird. Sie wird nicht nur von den Tangenten, sondern auch von den R′ nach den Spitzen der Kurve gehenden *Geraden* erfüllt, was soviel bedeutet, als dass, entsprechend den auf dem festem Kreise (3r) liegenden

[1]) Arch. for Math. og Naturv. 6 (1882) p. 125—152.

drei Spitzen sich als Klassenzahl 3 ergibt. Aus den erhaltenen Formeln wird eine Tabelle zusammengestellt, die für die verschiedenen „äusseren" und „inneren" Kurven beliebiger Ordnung die Anzahl der Doppelpunkte, der stationären Punkte[1]) und Tangenten angibt. Setzt man in diese Tabelle für Radien und Ordnungszahl die Werte unserer Kurve ein, so erhält man drei stationäre Punkte und eine Doppeltangente, die unendlich fern ist. Die drei stationären Punkte sind die schon genannten Spitzen auf dem Kreise (3 r), die sich bereits bei Bestimmung der Klassenzahl mitergaben. Was die übrigen *Plücker*schen Zahlen betrifft, so ergibt sich leicht, dass die Zahl der Doppelpunkte gleich Null ist, die der Wendetangenten = 0 und ferner ihr Geschlecht = 0 ist.

Von einem anderen Gesichtspunkte aus wird in *L. Burmesters*[2]) Kinematik die Theorie der cyklischen Kurven in einfacher und klarer Weise neu entwickelt, wenn auch mehr mit Rücksicht auf ihre Beziehungen zur Mechanik. Deshalb werden wir auch später Gelegenheit haben, auf dieses Werk zurückzukommen. Wir erwähnen es schon jetzt, weil *Burmester* naturgemäss auch von der Erzeugung der Kurven durch Rollen ausgeht. Die Ergebnisse werden synthetisch abgeleitet, doch ergibt sich an dieser Stelle nichts spezifisch neues für unsere Kurve. Der Beweis des Satzes von der doppelten Erzeugung der cyklischen Kurven wird geometrisch geführt.

Einen Fortschritt in der Theorie unserer Kurve bedeutet die Aufstellung der „équation intrinsèque", die *E. Cesàro*[3]) gibt. Ist $F(\rho, s, a_1, a_2 \ldots) = 0$ die Gleichung einer Familie von Kurven, wobei ρ der Krümmungsradius, s ein Bogenstück und die a konstante Grössen bedeuten, so ist allgemein $s = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}\left[\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2\mu} - 1\right]}}$.

---

[1]) Dabei wird zwischen Doppel- und stationären Punkten unterschieden; letztere bezeichnet man auch als Rückkehr- od. Cuspidalpunkte.

[2]) Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1887.

[3]) {Nouv. Ann. (3) 7 (1888) p. 171—190 u. 209—230, und
Nouv. Ann. (3) 9 (1890) p. 143.

Setzt man hier $\lambda = -9$, $\mu = -1$ für die dreispitzige Hypocykloide, so wird

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{3}\int \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = -\frac{1}{3}\sqrt{a^2 - \rho^2},$$

woraus folgt $9s^2 + \rho^2 = a^2$; setzt man noch für unseren Fall $a = 8r$, so ergibt sich als „natürliche Gleichung" der *Steiner*schen Hypocykloide $9s^2 + \rho^2 = 64r^2$. Etwas allgemeiner behandelt *F. Morley* [1]) das Problem der Epi- und Hypocykloiden, indem er „circular coordinates" einführt, d. h. also x durch $X + iY$ und y durch $X - iY$ ersetzt. So gelangt er zu einer allgemeinen Form der Gleichungen

$$x \cdot \frac{p+q}{c} = p.\zeta^{q} + p.\zeta^{p}$$

$$y \cdot \frac{p+q}{c} = p.\zeta^{-q} + q.\zeta^{-p}$$

wo p, q, c konstante Grössen sind und $e^{i\varphi} = \zeta^q$ gesetzt ist. *Schilling* hat später in ähnlicher Weise die komplexe Zahl benutzt.

Noch eine analytische Ableitung und Zusammenstellung der Hauptsätze über unsere dreispitzige Hypocykloide betreffend Gleichungen, Gestalt, Rektifikation und Quadratur nebst geschichtlichen Angaben finden sich in der schon erwähnten Dissertation von *J. Tschumi* [2]).

Eine neue Auffassung zeigen die Arbeiten von *F. Schilling* [3]). Es ist dies die Darstellung der Theorie der Rollkurven als direkte Anwendung der Theorie der Berührungstransformationen, wie sie von *Lie* in die Mathematik eingeführt worden ist. Dabei wird an die folgenden Sätze aus *Lie*s Berührungstransformationen [4]) angeknüpft:

---

[1]) Amer. J. of Math. 13 (1891) p. 182.

[2]) Ein Beitrag zur Geschichte und Diskussion der Cykloiden. Dissert. Bern 1882.

[3]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 54. (1907) p. 281 u. f. [II]

[4]) *Lie* und *Scheffers*, Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig, 1896. p. 66 u. f.

„Jede Berührungstransformation in x, y, y', *die nicht bloss eine erweiterte Punkttransformation ist, ordnet den* ∞^2 *Punkten* (x, y) *der Ebene* ∞^2 *verschiedene Kurven zu, die durch eine Gleichung von der Form* $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ *in den laufenden Koordinaten* x_1, y_1 *definiert werden. Umgekehrt definiert jede solche Gleichung, die* ∞^2 *verschiedene Kurven in* x_1, y_1 *darstellt, sobald* x, y *als Parameter betrachtet werden, eine bestimmte Berührungstransformation in der vorhergehenden Weise.“ „Ordnet die Gleichung* $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ *den* ∞^2 *Punkten* (x, y) ∞^2 *von einander verschiedene Kurven in* x_1, y_1 *zu, so ordnet sie auch den* ∞^2 *Punkten* (x_1, y_1) ∞^2 *von einander verschiedene Kurven in* (x, y) *zu.“* Für die Gleichung $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ treten die folgenden allgemeinen, bei Abrollung zweier Kreise aufeinander erhaltenen Gleichungen ein (die auch mit Hilfe der komplexen Zahlen, vgl. *Morley*, abgeleitet werden):

$$\begin{cases} x \cdot \cos bt + y \sin bt - x_1 \cos at + y_1 \sin at - (a + b) = 0 \\ -x \cdot \sin bt + y \cos bt - x_1 \sin at - y_1 \cos at = 0 \end{cases}$$

Durch diese Gleichungen werden den ∞^2 Punkten (x, y) des einen in einer Ebene bewegten Systems Σ ∞^2 Kurven derselben Ebene im anderen System Σ_1 und umgekehrt den ∞^2 Punkten (x_1, y_1) des Systems Σ_1 ∞^2 Kurven im anderen System Σ zugeordnet. Es kann also der Satz aufgestellt werden: Durch die beiden angeführten Gleichungen, d. h. durch „äussere Kreisbewegungen“ ist zwischen den ebenen Systemen Σ und Σ_1 eine Berührungstransformation festgelegt, „die Berührungstransformation der äussern Kreisbewegung“. Dieser Satz bildet die Grundlage für die ausführlichen Untersuchungen des Zusammenhangs zwischen der von *Lie* aufgestellten Berührungstransformation und den Rollkurven.

§ 2.

Die Erzeugung durch ein Gelenkparallelogramm ist seltener II.
als Ausgangspunkt einer theoretischen Untersuchung unserer Kurve benutzt worden als die meisten übrigen Erzeugungsarten, sondern ist zugleich in Verbindung mit der Erzeugung

durch Rollen, mehr für praktische Zwecke benutzt worden, wie wir später sehen werden.

Wenn wir zunächst der Abhandlung von *G. J Verdam*[1]) Erzeugung durch ein Gelenkparallelogramm, hier ihren Platz anweisen, so ist das zwar insofern nicht richtig, als auch *Verdam* von der Erzeugung unserer Kurve durch Rollen ausgeht, wird aber durch die Art der Auffassung und Darstellung gerechtfertigt, da sie leicht zu der dann von *Beltermann* gegebenen Erzeugung führt.

Dass *Verdam* zur Aufstellung der Gleichungen die Zerlegung und Zusammensetzung von Geschwindigkeiten nach den Regeln der Mechanik benutzt, ist nebensächlich. Worauf es ankommt, ist, dass die Bewegung des Rollens zerlegt wird; zunächst dreht sich der Radius OF (vielleicht als Stab gedacht) um einen Winkel ϑ und dann der Radius OP (Fig. 6), der erst noch in der Verlängerung von OF lag, um den Winkel -3ϑ um den Punkt F, (in dem man sich ein Gelenk angebracht denken kann). Nun ist es leicht, OFP zu einem Parallelogramm zu vervollständigen, wie es *Bellermann*[2]) in seiner Dissertation getan hat. Man zieht zu FP durch O die Parallele OS′, verbindet S′ mit P und verändert das so entstandene Gelenkparallelogramm in der in Kapitel 1 angegebenen Weise so, dass P unsere Kurve beschreibt. Um nach dieser Erzeugung die Tangente zu konstruieren, stellt *Bellermann* folgende Überlegung an: Während (Fig. 2) der Punkt F in die benachbarte Lage auf dem Bogen ds rückt, rückt der Punkt S′ in die benachbarte Lage auf dem Bogen ds′, wobei sich verhält $ds' : ds = q'b : qb'$, (wenn q und q′ die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten sind, b und b′ die entsprechenden Stablängen). Durch die alleinige Verrückung von F wird P um die Strecke ds verschoben in einer Richtung, die, wenn ds sehr klein genommen wird, senkrecht auf OF, also auch senkrecht auf S′P steht; ebenso wird P durch die Verrückung von S′ in einer Richtung senkrecht

[1]) Arch. d. Math. (1) 11 (1848) p. 13—25.

[2]) Epicykloiden und Hypocykloiden. Diss. Jena 1867.

zu OS', also auch senkrecht zu FP fortbewegt. Da es nur auf das Verhältnis von ds : ds' ankommt, so erhält man die Tangente Q'P, wenn man auf den genannten Loten zu S'P und FP von P aus Längen abträgt, die im Verhältnis von ds und ds' stehen und durch die erhaltenen Endpunkte die Parallelen zu den beiden Loten zieht, die sich in Q' schneiden. Da hier der Stab OF = 2OS' ist, dafür aber OS' sich mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit bewegt wie OF, so ist ds = ds'; die Konstruktion wird demnach sehr einfach, die beiden Lote in P sind gleich lang zu machen; die vierte Ecke des so erhaltenen Rechtecks mit P verbunden, gibt die Tangente. Wie wir schon wissen, geht die Tangente auch durch den Punkt M, den Gegenpunkt des Berührungspunktes des festen und rollenden Kreises; P, M, Q' liegen also in gerader Linie. Verlängert man diese Gerade noch bis zum Schnitt S mit dem Kreise C^2, so ist S der Gegenpunkt von S', und da Bogen MP gleich Bogen MS ist, so sind auch die Sehnen SM und MP einander gleich. Errichtet man auf der Tangente in P das Lot, so geht die Normale auch durch den Punkt T. Sie schneidet den festen Kreis zum anderen Male in J; J liegt dann auch in einer geraden Linie mit SOS', und PT ist der dritte Teil von JT. Verlängert man also JT über T hinaus um sich selbst, so erhält man den Krümmungsmittelpunkt, der zu P gehört oder einen Punkt der Evolute, wie wir bei *Zehme* gesehen haben. (Vgl. Fig. 6.)

In der Litteratur wird allgemein *Bellermann* als der Autor genannt, der zuerst diese Erzeugung durch das Gelenkparallelogramm angegeben hat. Doch muss darauf hingewiesen werden, dass schon 1861 *Böklen*[1]) sie gekannt und in Verbindung mit der Entstehung durch Rollen dargestellt hat. Wir führen den Text wie er sich bei *Böklen* findet, bis auf die veränderten Buchstaben wörtlich an: „*Denken wir uns ein Parallelogramm* OFPS', *dessen Ecke* O *fest ist. Die Seiten* OF *und* OS'[2]) *seien jede mit einer besonderen und konstanten Winkelgeschwindigkeit begabt, nach gleichen oder entgegengesetzten*

[1]) Arch. d. Math. (1) 37 (1861) p. 118—123.

[2]) Hier ist an der betreffenden Stelle ein Druckfehler, es muss AD, statt AC heissen.

Richtungen. Dadurch wird OFPS′ *zwar die Form verändern, aber doch stets ein Parallelogramm bleiben. In einem bestimmten Falle können die Punkte* O, F, P, S′ *auch in einer Richtung liegen. Die Kurve, welche* P *beschreibt, kann man sich nun auf zweierlei Art entstanden denken; entweder durch das Rollen eines Kreises, dessen Mittelpunkt* F *und Halbmesser* FP *ist, auf dem Umfange eines festen Kreises, dessen Mittelpunkt* O *und Halbmesser gleich* OF ± FP *ist, oder durch das Rollen eines Kreises, dessen Mittelpunkt* S′ *und Halbmesser* S′P *auf dem Umfange eines festen Kreises, dessen Mittelpunkt* O *und Halbmesser gleich* OS′ ± S′P *ist. Diese Betrachtungen führen zu dem Satz: Wenn man eine Gerade in zwei Abschnitte teilt* D *und* d, *und drei Kreise beschreibt, deren Durchmesser* D, d *und* D + d *sind, so dass die beiden kleineren Kreise sich von aussen und den grösseren Kreis von innen berühren, dann entstehen durch die Bewegung von je zweien dieser Kreise auf dem dritten, welchen man sich als fest denkt, identische Rollkurven. Ein Punkt des Kreises* D^2 *z. B. beschreibt beim Rollen innerhalb des Kreises* $(D + d)^2$ *dieselbe Kurve, wie ein Punkt des Kreises* d^2. *Hierdurch wird der obige Satz, worin die Rektifikation der Hypo- und Epicykloiden und ihre Ähnlichkeit mit den Evoluten ausgesprochen ist, verallgemeinert.*“ Die Spezialisierung auf unseren Fall haben wir schon kennen gelernt. Hieraus wird dann der auf Seite 12 angeführte Satz bewiesen.

Wie schon Seite 17 angedeutet, hat *Burmester* in seinem Buche über die Kinematik die Entstehung der Kurve durch ein aus starren Seiten gebildetes veränderliches Parallelogramm angegeben und daraus ebenso die wichtigsten Sätze synthetisch abgeleitet. Eine Erweiterung davon stellen die „affin veränderlichen Systeme“ dar: Die Trochoiden sind die Bahnkurven der Punkte eines solchen rotierenden Systems, woraus dann Beziehungen zu den unter III angeführten Erzeugungsarten hergestellt werden. Z. B. erhält man leicht den Satz: „Bewegen sich zwei Punkte proportional auf einem Kreise, so umhüllt ihre Verbindungsgerade eine Epi- oder Hypocykloide, jenachdem die Bewegung dieser Punkte in gleichem oder entgegengesetztem

Sinne erfolgt; und der Berührungspunkt teilt die Verbindungsstrecke bzw. innerhalb oder ausserhalb in konstantem Verhältnisse.“ Hiervon haben wir im ersten Kapitel die Anwendung kennen gelernt.

Eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven gibt *F. Schilling*[1]) in Verbindung mit seinen kinematischen Modellen. Es wird als Definition die kinematische Erzeugung mit Hilfe eines Gelenkparallelogramms an die Spitze gestellt und dann unter Benutzung der komplexen Variablen die allgemeine einfache Gleichung

$$z = C \cdot e^{i\omega t} + c \cdot e^{i\Omega t}$$

aufgestellt. Indem man für jede der cyklischen Kurven die entsprechenden konstanten Werte einführt und die reellen und imaginären Bestandteile beider Seiten gleichsetzt, erhält man die üblichen Gleichungen. Auf diese Betrachtungen folgt dann die Beschreibung der Modelle, auf die wir später noch kurz zurückkommen wollen.

§ 3.

Wie wir gesehen haben, hatte schon *J. Steiner* den Satz **III.**
von der Erzeugung einer Kurve vierter Ordnung und dritter **a. u. b.**
Klasse als Enveloppe der Verbindungslinie zweier Punkte, die sich auf einem Kegelschnitt mit gleichförmigen Geschwindigkeiten und in entgegengesetzten Richtungen bewegen, am Schlusse der genannten Arbeit ausgesprochen. Wir haben ferner (Fig. 2 od. 6) aus der Entstehung unserer Kurve durch ein Gelenkparallelogramm gesehen, dass der Winkel xOS′ doppelt so gross ist wie der Winkel xOF oder xOM. Betrachtet man nun den Scheitelwinkel des erstgenannten, so ist dieser natürlich auch doppelt so gross wie der Winkel xOM. Andrerseits ist SM uns als Tangente schon bekannt. Man kann folglich den Schluss ziehen: Wenn sich zwei Radien OS und OM des Kreises C^2 in entgegengesetzten Richtungen bewegen, OS mit der doppelten Winkelgeschwindigkeit wie

[1]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 44 (1899) p. 224—227 und 51. (1904) p. 1 — 49 [I].

OM, so ist die Verbindungslinie ihrer Endpunkte SM Tangente, also Einhüllende unserer Kurve.

L. Cremona[1]) hat diesen Satz so ausgesprochen: „Wenn zwei Radien OS, OM des Kreises C^2 sich gleichzeitig um den Punkt O in entgegengesetztem Sinne bewegen und zwar mit der Bedingung, dass ihre Winkelgeschwindigkeiten das konstante Verhältnis 2 : 1 haben, so umhüllt die Sehne SM die Hypocykloide". *Cremona* beweist den Satz aus den Eigenschaften, dass sich zwei aufeinander senkrechte Tangenten SM und SM′ auf dem Kreise C^2 im Punkte S schneiden und die dritte Tangente, die noch durch den Punkt S geht, auf der Verbindungssehne MM′, die ein Durchmesser des Kreises ist, senkrecht steht. Schneidet diese Sehne den Kreis noch in dem Punkte S_1, so besteht zwischen den in demselben Sinne gemessenen Bogen MS und SS′ die einfache Beziehung: $SS_1 + 2\,MS = 2\pi$, woraus der genannte Satz folgt (Fig. 6). Verbindet man nicht die Punkte S und M, sondern S′ und M, so hüllt diese Linie auch eine gleiche Hypocykloide ein, da dieselben Bedingungen erfüllt sind. Wir erhalten die „Gegenhypocykloide", die gegen die erste um 180° gedreht ist.

Der Beweis, mit dem *G. Bellermann*[2]) diese Konstruktion (die er in seiner Dissertation auch erwähnt) begründet, ist sehr einfach. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke (Fig. 2) L_1PL_2, PFM und PS′S folgt, dass die Tangente PQ′ mit der Verbindungslinie PMS der Punkte, in welchem die rollenden Kreise den Scheitelkreis berühren, zusammenfällt. Daraus ergibt sich die oben angegebene Erzeugungsweise. (Weiter folgt daraus, dass man unsere Kurve auch erhält, wenn man zwei Punkte auf zwei konzentrischen Kreisen laufen lässt (Fig. 3), indem der Mittelpunkt ihrer Verbindungslinie die Bahn beschreibt. Die speziellen Verhältnisse haben wir im ersten Kapitel unter III. b. angegeben.)

Die Konstruktion IIIa hat zuerst *J. E. F. Eckardt*[3]) zur Grundlage seiner Untersuchungen der cyklischen Kurven ge-

1) Crelle, J. f. d. r. u. a. Math. 64 (1864) p. 101—123.

2) Epicykloiden und Hypocykloiden. Dissert. Jena 1867.

3) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 15 (1870) p. 129—134. [I]

macht und daraus auf analytischem Wege die allgemeinen Gleichungen hergeleitet

$$x = \frac{r}{n+1} (n \cos \vartheta + \cos n \vartheta)$$

$$y = \frac{r}{n+1} (n \sin \vartheta + \sin n \vartheta).$$

Dabei ist $\frac{r}{n+1}$ der Radius des Wälzungskreises, $\frac{r(n-1)}{n+1}$ der Radius des Grundkreises und n das Geschwindigkeitsverhältnis der beiden Punkte. Setzt man für das letztere überall $n = -2$ ein, so erhält man die bekannten Gleichungen unserer Kurve. Aus den Gleichungen wird sofort der Satz abgeleitet, dass jeder Punkt einer gemeinen Hypocykloide (d. h. einer solchen, bei der der beschreibende Punkt auf dem Umfange des rollenden Kreises liegt) die innerhalb des eingeschriebenen Kreises liegende Strecke seiner Tangente in konstantem Verhältnis von aussen teilt; wir haben schon gesehen, dass in unserem Falle $SM = MP$ ist.

In einer späteren Arbeit *Eckardts*[1]) wird auch die unter III. b. angegebene Erzeugungsweise mitgeteilt.

Ausführlicher hat *L. Kiepert*[2]) auf Grund derselben Konstruktion (III a.) die Epi- und Hypocykloiden behandelt. *Kiepert* nennt zwar diese Erzeugungsweise „noch nicht erwähnt“: sie findet sich aber bereits, wie wir gesehen haben, ganz deutlich ausgesprochen in den Arbeiten *Steiner*s und *Cremona*s. *Kiepert*s Abhandlung ist zu gleicher Zeit wie die erste *Eckardt*'sche Arbeit entstanden, durch ungünstige Verhältnisse aber hat sich ihre Drucklegung um zwei Jahre verzögert. Die Arbeit ist wertvoll durch die neue ausführliche Behandlungsweise der cyklischen Kurven und durch die Einfachheit, mit der wichtige Sätze aus der erwähnten Erzeugungsart abgeleitet werden wie z. B.: Man erhält alle Erzeugenden wenn M einmal (S also zweimal), den Kreis C^2 durchläuft, S und M sich also

---

1) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 18 (1873) p. 322. [11]

2) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 17 (1872) p. 129—147.

dreimal auf der Peripherie treffen und sie folglich in drei gleiche Teile teilen. Die Kreistangenten in diesen Punkten sind zugleich Tangenten der Hypocykloide, der Kreis und die C_3^4 berühren sich dort und also wird auch die C_3^4 in diesen Punkten in drei gleiche Teile geteilt. Drei Erzeugende sind Durchmesser des Kreises, teilen diesen in drei gleiche Teile und haben Maxima ihrer Längen in den Punkten, die die genannten Treffpunkte von M und S sind; sie sind also Rückkehrtangenten, ihre Berührungspunkte sind die Spitzen, die auf dem Kreise (3 r) — dem von Painvain Richtkreis genannten — liegen und diesen Kreis ebenfalls in drei gleiche Teile teilen u. s. w. Ebenso wird der Zusammenhang mit der Erzeugung durch Rollen gewonnen, wie es vorher umgekehrt geschehen ist; ferner werden die Gleichungen aufgestellt und wird bewiesen, dass die Evolute eine ähnliche Hypocykloide ist, deren Scheitel in den Spitzen der ersten liegen. Auf den Teil der Arbeit, der die Polar- und Fusspunktkurven der Hypocykloide betrachtet, kommen wir am Schlusse noch zu sprechen.

Auch *J. Wolstenholme*[1]) hat 1873 einer Theorie der Epi- und Hypocykloiden dieselbe Erzeugung vorangestellt. *Burmester* gewinnt sie aus dem affin-veränderlichen System, das wir schon erwähnt haben und gibt dazu verschiedene Konstruktionen. Auch die Erzeugung mit Hilfe zweier konzentrischen Kreise führt er an. Von dieser geht *E. F. J. A. Reincke*[2]) bei seinen Untersuchungen aus. Die cyklischen Kurven werden „dargestellt als geometrischer Ort des Mittelpunktes derjenigen Geraden, welche zwei auf zwei konzentrischen Kreisen gleichförmig bewegte Punkte in jedem Moment verbindet.“ Die Untersuchungen tragen insofern gegenüber den bisherigen einen anderen Charakter, als der Begriff der Zeit verwendet wird. Stellt man die Gleichungen der Bahn des beschreibenden Punktes in Polarkoordinaten und dann die Beziehungen zwischen Bogen, Zeit und Geschwindigkeit auf, so gelangt man zu Gleichungen für x und y, die ganz analog

---

1) Proceed. of Lond. Math. Soc. 4. (1873) p. 321—327.

2) Schulprogr. Malchin 1892.

denen für die cyklischen Kurven gebaut sind, aber noch die Zeit enthalten:

$$\xi = \frac{r \cdot \cos \frac{v}{r} t + r' \cos \frac{v'}{r'} t}{2}; \quad \eta = \frac{r \sin \frac{v}{r} t \pm r' \sin \frac{v'}{r'} t}{2}$$

Durch Elimination von t erhält man die bekannten Formeln der cyklischen Kurven selbst. Es muss also die folgende Behandlung der obigen Gleichungen für ξ und η dieselben Resultate liefern, als wenn man die gewöhnlichen Gleichungen benutzt hätte. In der Entwicklung zeigt sich eine gewisse Analogie mit *Weissenborn.* Auch das Verhältnis der Pericykloiden wird klargestellt.

Wieder etwas anders behandelt *R. Blum*[1]) das Problem: „Eine gerade Linie drehe sich um einen ihrer Punkte, während gleichzeitig dieser Drehpunkt mit einer der Drehungen der Geraden proportionalen Winkelgeschwindigkeit auf der Peripherie eines Kreises fortschreitet. Es soll die Kurve untersucht werden, welche von den einzelnen Lagen der beweglichen Geraden umhüllt wird.“ Es ist unschwer zu erkennen, dass dies im Grunde die bisherige Erzeugungsweise ist. Die Untersuchungen werden elementargeometrisch und analytisch geführt. Ist n der „Drehungskoeffizient“, so bestehen zwischen diesem, den Radien R, r und dem Radius ρ des der Hypocykloide eingeschriebenen Kreises C^2, der hier also auch gleich r ist, die Beziehungen $R = \frac{n\rho}{n+1}$; $r = \frac{\rho}{2(n+1)}$; $R : r = 2n : 1$. Ist speziell $n = n_1 = -\frac{3}{2}$, so ist $R = -3r$. Analog der doppelten Erzeugung durch Rollen gibt es einen zweiten Drehungskoeffizienten $n = n_2 = -\frac{3}{4}$. Für ihn ist der Radius des rollenden Kreises $r' = 2r$ und $R = -\frac{3}{2}r'$. Ferner gilt, entsprechend dem Satze $R + r' + r$ $(= 3r - 2r - r) = o$, hier die Beziehung: $n_1 + n_2 + 2\, n_1 \cdot n_2 = o$. Der übrige

---

[1]) Schulprogr. Friedr.-Wilh.-Realsch. Stuttgart 1902.

Teil der Arbeit beschäftigt sich mit der Ableitung und dem Beweise der oben angegebenen Sätze über Tangenten, Normalen, Evoluten u. s. w.

In Verbindung mit der Erzeugungsweise dieses Abschnittes nennen wir noch eine Arbeit von *A. Gob*[1]), die 1906 erschienen ist. (Es ging ihr 1902 schon eine Arbeit über die *Steiner*sche Hypocykloide mit einigen neuen Sätzen voraus, die wir aber erst im folgenden Abschnitt besprechen wollen, weil sie in der Hauptsache an die *Steiner*sche Erzeugungsweise durch die *Wallace*sche Gerade anknüpft.) Ausser einigen symmetrischen Beziehungen zwischen zugehörigen Tangenten und Normalen, — neu sind die Bezeichnungen „primäre" und „sekundäre Tangenten" — wird die Gleichung unserer Kurve in Tangential-Koordinaten gegeben: $u^2 + v^2 + r u (3 v^2 - u^2) = o$ und daraus die Erzeugung abgeleitet: Wenn ein Radius eines Kreises O sich mit einer Winkelgeschwindigkeit w dreht und eine Gerade, die an seinem Endpunkte befestigt ist, sich zu gleicher Zeit mit der Winkelgeschwindigkeit $-\frac{1}{2}$ w oder $\frac{1}{4}$ w dreht, so hüllt diese Gerade eine C_3^4 ein, — ein hübsches Analogon zu *Blums* Erzeugungsweise. —

§ 4.

Betrachten wir nun die Erzeugung der dreispitzigen Hypocykloide als Enveloppe der *Simson*schen, oder vielleicht besser der *Wallace*schen Geraden, so sind wir damit zu der berühmten Arbeit von *J. Steiner, Über eine besondere Curve dritter Classe (und vierten Grades)* gelangt, die hauptsächlich die umfangreiche Litteratur veranlasst hat. Sie ist erschienen in dem Journal f. d. reine u. angew. Math. Bd. 53 S. 231 und wieder abgedruckt in seinen *Gesammelten Werken* Bd. II S. 639. Wegen ihrer Wichtigkeit ist sie als „Anhang" hier beigefügt und die Figur 14 zu ihr gezeichnet.

Es ist angebracht, die bei vielen Autoren, die an die *Steiner*sche Abhandlung anknüpfen, sich immer wieder findende

---

[1]) Liège Mém. (3) 6 (1906).

Bemerkung, die von *Steiner* angegebenen Sätze seien ohne Beweise mitgeteilt, dahin einzuschränken, dass das zwar für die obige Abhandlung richtig ist, dass man aber in früheren Arbeiten *Steiner*s sehr wohl eine Reihe von Beweisen zerstreut finden kann, die nur nicht zusammengestellt und speziell für diese Arbeit zugeschnitten sind. *Steiner* ist zu den meisten Sätzen über die Kurve offenbar gelangt aus den Eigenschaften des Dreiecks in Verbindung mit dem Kreise (und den Kegelschnitten überhaupt) und schon deshalb ist mancher Beweis früher vorhanden gewesen (vgl. dazu auch die Arbeit von *Fiedler* S. 55; dann kann man jetzt auch in den von *Geiser* und *Schröter* herausgegebenen Vorlesungen *Jakob Steiner*s über synthetische Geometrie III. Auflage 1887 und 1898, besonders in den Untersuchungen über Kegelschnittbüschel eine Reihe von Sätzen finden).

Auch die Streitfrage, wer zuerst zu der Erkenntnis gekommen ist, dass die in *Steiner*s Abhandlung behandelte Kurve die dreispitzige Hypocykloide ist, soll hier ihre Erledigung finden. Wir wollen alle diesbezüglichen Äusserungen hören und dann zusehen, wie weit dieselben zutreffen und was sich zur Rechtfertigung *Steiner*s gegen die erfolgten Angriffe anführen lässt.

P. Serret[1]) schreibt 1870: „ . . . . *M. Ferrers hat als erster ihre Natur erkannt, indem er feststellte, dass diese Enveloppe nichts anderes ist, als eine Hypocykloide vom Modul* $\frac{1}{3}$, *ein bemerkenswertes Resultat, das dem Spürsinn Steiners entgangen zu sein scheint.*“

Bei *Tschumi*[2]) findet man auf S. 30: „ . . . *die auf diese Art entstandene Kurve dritter Klasse ist die dreispitzige Hypocykloide. Es ist merkwürdig, dass Steiner das in seiner Betrachtung nirgends bemerkt, um so merkwürdiger, als er schon in der in Frage stehenden Arbeit nebenbei erwähnt:* „„*Die Curve* C_3^4 *wird ferner*

[1]) Nouv. Ann. (2) 9 1870 p. 73—84. [1]

[2]) Ein Beitrag zur Geschichte und Diskussion der Cykloiden. Dissert. Bern, 1892.

auch durch rollende Bewegung erzeugt,"" was zur Evidenz erkennen lässt, dass er selbst durchaus sicher war, die dreibogige Hypocykloide vor sich zu haben. Wäre aber in diesem Punkte noch irgend ein Zweifel möglich, so würde derselbe zerstreut durch die Bemerkung in den „Vermischten Sätzen und Aufgaben" (Crelle 55 S. 271)[1]*, wo er sich bei einer anderen Art der Entstehung der dreieckigen Hypocykloide auf unsere Kurve als eine bereits behandelte beruft. Doch war es nicht Professor Steiner, sondern Professor Schläfli, der zuerst erkannte, dass die Einhüllungskurve aller einem Kreise zugehörigen Fusspunktlinien drei Rückkehrpunkte habe, von welcher Entdeckung er seinem Freunde Steiner Kenntnis gab."*

Es folgt dann *J. H. Graf*[2], Briefwechsel S. 263: „. . . . *Von diesem Zeitpunkte an (1856) stockte der Briefwechsel, denn Schläfli war über Steiner sehr ungehalten, und die beiden Freunde überwarfen sich, nicht, dass Schläfli es äusserlich zeigte, aber er beschränkte den Verkehr mit Steiner auf das Notwendigste, besonders auch dann, als Steiner ganz sich zurückgezogen hatte und von seiner Pension in Bern oder Uetzdorf lebte. Das Zerwürfnis kam hauptsächlich zum Ausbruch bei Anlass der Abhandlung Steiners: über eine bes. Kurve u. s. w. Wie aus dem Briefwechsel sich ergibt, hat Steiner das genannte Problem Schläfli vorgelegt und letzterem auch eine Reihe der interessantesten Sätze über die fragliche Umhüllungskurve mitgeteilt. Die Entdeckung aber, dass die Kurve eine Hypocykloide sei, schreibt Schläfli sich selber zu. Steiner hat aber in der ganzen Abhandlung den Namen Hypocykloide nirgends ausgesprochen, Schläflis erst gegen Schluss der Abhandlung bei Anlass einer anderen Erwägung der Kurve genannt und dann bloss beigefügt: die Kurve wird ferner durch rollende Bewegung erzeugt."*

C. Wirtz[3] schreibt in der Einleitung seiner Dissertation folgendes: „ . . . . . *Die Fundamentaleigenschaft, dass die*

---

[1] Gesammelte Werke Bd. II p. 677, 678.
[2] Berlin 1896, Mitteilg. d. naturf. Gesellschaft.
[3] Die Steinersche Hypocykloide. Dissert. Strassburg 1900.

Steinersche Kurve mit einer gewissen Hypocykloide identisch ist, war Steiner bereits bekannt; er verdankte diese Kenntnis seinem Freunde Schläfli, was er merkwürdigerweise verschweigt!"

Schliesslich sei noch eine Bemerkung von *G. Loria* erwähnt:[1]) „. . . . *So ist die von Schläfli gemachte Bemerkung bewiesen, dass die Steinersche Kurve eine dreispitzige Hypocykloide ist.*" Hiernach scheint man sich darüber einig zu sein, dass *Schläfli* der Entdecker der wichtigen Eigenschaft ist. Doch lassen sich verschiedene Gründe gegen diese Ansicht anführen: Betrachten wir der Reihe nach die angeführten Stellen, so ist zunächst zu bemerken, dass *Serret* mit seiner Ansicht hierbei eigentlich ausscheidet; seine Bemerkung ist sicher falsch, denn die betreffende Arbeit von *Ferrers* erschien erst 1868, und sodann geht aus dem betreffenden Aufsatze *Steiners* unzweifelhaft hervor, dass er diese Kenntnis von der Art seiner Kurve wohl hatte, wie *Tschumi* ausführt. Was *Tschumi* sagt ist alles richtig und begründet bis auf den letzten Satz „*doch war es nicht Professor Steiner, sondern Prof. Schläfli . . . .*" Zur Begründung dieser Behauptung wird nichts angeführt! Auch aus dem Briefwechsel ist kein entscheidender Aufschluss zu erlangen, *Graf* drückt sich sehr vorsichtig aus, wie wir sahen: „*Die Entdeckung aber . . . . schreibt sich Schläfli selber zu*", das ist doch sicher kein positiver Beleg, obige Ansicht zu stützen; und aus dem von *Graf* geschilderten Zerwürfnis (vgl. S. 30) geht doch hervor, dass *Steiner* sich ebenso diese Entdeckung zuschrieb. Warum nur erkennt man sie durchaus *Schläfli* zu? Ist es nicht möglich, wenn schon *Schläfli* selbstständig seine Entdeckung machte (was gar nicht bestritten werden soll), dass *Steiner* sie doch vorher gehabt und sie nur nicht mitgeteilt, hatte oder dass er sie zu gleicher Zeit machte?

Sicherlich aber ist kein Grund vorhanden zu der Behandlung dieser Frage in einer Form, wie dies von *Wirtz* geschehen ist. Da wird *Steiner* direkt ein schwerer Vorwurf gemacht, der bei der mangelhaften Begründung durchaus zurückgewiesen werden muss. Für die Beurteilung der Kennt-

[1]) A. a. O. S. 148.

nis *Steiners* von der Tragweite seiner eignen Abhandlung ist auch bisher gar nicht berücksichtigt worden, dass doch der letzte Satz in derselben, der eine von der ersten ganz abweichende Entstehung der allgemeinen Kurve dritter Klasse aus der Bewegung zweier Punkte auf einer Ellipse angibt, von einer sehr tiefen Erkenntnis der Natur seiner Kurve zeugt. Und das ist meines Erachtens wertvoller als blosse Behauptungen. Schliesslich ist es doch äusserst unwahrscheinlich, dass *Steiner* in dem einen Punkte seinen Freund *Schläfli* ausdrücklich als Urheber der Idee anführt, und in einem andern die Autorschaft dieses selben Freundes verheimlicht.

Entgegen den obigen *Steiner* ungünstigen Aussprüchen sagt *Neuberg* in seinen Notes sur l'hypocycloïde:[1]) *C'est Steiner qui a énoncé le premier que l'enveloppe de la droite* g, *lorsque* P *parcourt la circonférence* D^2, *est une hypocycloïde.*"

Nach Besprechung dieses unerfreulichen Prioritätsstreites nehmen wir die Betrachtungen über unsere Kurve wieder auf. Zuerst sind mehrere englische Forscher zu nennen, die sich die Lösung des Problems der „pedal line" zur Aufgabe machten; ihr Hauptbestreben besteht darin, die Gleichung der Kurve in geeigneter Form aufzustellen.

Greer[2]) geht zunächst von der noch allgemeineren Aufgabe aus, von irgend einem Punkte P_1 (α, β, γ) der Ebene des Dreiecks ABC (bei *Steiner* von den Punkten des umschriebenen Kreises D^2) auf die Seiten des Dreiecks die Lote zu fällen, bestimmt ihre trilinearen Koordinaten (z. B. für die Seite AB: $\alpha + \gamma \cdot \cos B$, $\beta + \gamma \cdot \cos A$, o) und stellt dann die Bedingung dafür auf, dass die Fusspunkte der drei Lote in einer geraden Linie liegen sollen:

$$(\alpha + \beta \cdot \cos C)\ (\beta + \gamma \cdot \cos A)\ (\gamma + \alpha \cos B) + (\beta + \alpha \cdot \cos C)\ (\gamma + \beta \cos A)\ (\alpha + \gamma \cdot \cos B) = 0.$$

Schliesslich wird eine Gleichung gewonnen, die ziemlich umständlich und, aus dem Zusammenhange herausgenommen,

---

[1]) Liège Mém. (1906) p. 7.

[2]) Quart. Journ. 7 (1866) p. 70

wenig übersichtlich ist. Daher verzichten wir darauf, sie anzuführen.

„The following investigation, in which it is proved by the Cartesian method, that the required envelope is a well-known curve — in fact, a three-cusped hypocycloid, of which the centre of the nine-point circle of the triangle is the centre, may therefore not be without interest." Damit leitet *Ferrers*[1]) einen Identitätsbeweis der *Steiner*schen Kurve mit der dreispitzigen Hypocykloide ein. Ist (Fig. 4) ABC ein Dreieck, D der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises D^2, F ein Punkt auf seinem Umfange, von dem die Lote F (C′, B′, A′) auf die Seiten AB, AC, BC bzw. gefällt sind, S der Schwerpunkt des Dreiecks, O der Mittelpunkt des Neunpunktekreises, dann weiss man, dass G mit DO in gerader Linie liegt und sie so teilt, dass DG = 2GO ist; 2r sei der Radius des Kreises, D der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems. Sind die Radien nach A, B, C, P_1 gegen die x-Axe geneigt unter den Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ und wählen wir die x-Axe so, dass $\alpha + \beta + \gamma = o$ ist, dann sind die Koordinaten von G:

$$\frac{2r}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma); \ \frac{2r}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$$

und die von O:

$$r(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma); \ r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma).$$

Die Gleichung von BC wird:

$$x \cdot \cos\frac{\beta+\gamma}{2} + y \cdot \sin\frac{\beta+\gamma}{2} = 2r\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\text{oder } x \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - y \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2r\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

die von P_1A': $x\sin\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2} = 2r\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)$. Daher ist die Abscisse von A′: $2r\left\{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta-\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \theta\right)\right\}$ oder: $r\{\cos\beta + \cos\gamma + \cos\theta - \cos(\alpha + \theta)\}$, die Ordinate:

[1]) Qu. J. $\begin{cases} 8 \text{ (1867) p. 209.} \\ 9 \text{ (1868) p. 147.} \end{cases}$

$r\{\sin\beta + \sin\gamma + \sin\Theta + \sin(\alpha + \Theta)\}$. Verlegt man jetzt den Anfangspunkt nach O, so sind die Koordinaten von

A': $r\{\cos\Theta - \cos\alpha - \cos(\alpha + \Theta)\}$; $\quad r\{\sin\Theta - \sin\alpha + \sin(\alpha + \Theta)\}$

B': $r\{\cos\Theta - \cos\beta - \cos(\beta + \Theta)\}$; $\quad r\{\sin\Theta - \sin\beta + \sin(\beta + \Theta)\}$

C': $r\{\cos\Theta - \cos\gamma - \cos(\gamma + \Theta)\}$; $\quad r\{\sin\Theta - \sin\gamma + \sin(\gamma + \Theta)\}$

Folglich ist die Gleichung von $A'B'C'$:

$$\frac{x - r\{\cos\Theta - \cos\alpha - \cos(\alpha + \Theta)\}}{\cos\gamma - \cos\beta + \cos(\gamma + \Theta) - \cos(\beta + \Theta)}$$
$$= \frac{y - r\{\sin\Theta - \sin\alpha + \sin(\alpha + \Theta)\}}{\sin\gamma - \sin\beta - \sin(\gamma + \Theta) + \sin(\beta + \Theta)},$$

die man nach verschiedenen Umwandlungen schliesslich auf die Form bringen kann: $x \sin\frac{\Theta}{2} + y\cos\frac{\Theta}{2} = r\sin\frac{3\Theta}{2}$. Wenn p die Länge des Lotes von O auf $A'B'C'$ und φ seine Neigung gegen die y-Axe ist, so ergibt sich hieraus $p = r\sin 3\varphi$, womit gezeigt ist, dass die Enveloppe dieser Linie eine dreispitzige Hypocykloide ist, in der der Radius des festen Kreises 3 r und die x-Axe Tangente in einer Spitze ist.

Bei den andern Autoren dieser Periode werden wir uns kürzer fassen können. *J. Griffith*[1]) gibt „*a short method of finding the equation to a certain envelope u. s. w.*“ Sind x, y, z die trilinearen Koordinaten eines Punktes des umschriebenen Kreises, und ist $L \cdot xyz + \Sigma a \cdot \mathrm{ctg}\, A x \cdot (y^2 + z^2 + zyx \cdot \cos A) = o$ die Fusspunktlinie, wobei $L = \alpha\sin A + \beta\sin B + \gamma\sin C$, so lautet nach einigen Substitutionen die Gleichung der Kurve

$$27\,L^4 + 4L\left\{A_1B_1C_1\left(L\cdot\Sigma\frac{A_1}{B_1C_1} + 2\Sigma\frac{\alpha\sin 2A}{A_1}\right)^2 + \frac{1}{A_1B_1C_1}\cdot\left(L\cdot\Sigma\frac{B_1C_1}{A_1} + 2\Sigma A_1\cdot\alpha\cdot\sin 2A\right)^3\right\} - \left(L\cdot\Sigma\frac{B_1C_1}{A_1} + 2\Sigma A_1\,\alpha\cdot\sin 2A\right)^2\cdot\left(L\cdot\Sigma\frac{A_1}{B_1C_1} + 2\Sigma\frac{\alpha\cdot\sin 2A}{A_1}\right)^2 - 18\,L^2\left(L\cdot\Sigma\frac{B_1C_1}{A_1} + 2\Sigma A_1\,\alpha\cdot\sin 2A\right)\left(L\cdot\Sigma\frac{A_1}{B_1C_1} + 2\Sigma\frac{\alpha\cdot\sin 2A}{A_1}\right) = O.$$

[1]) Qu. J. { 9 (1868) p. 364.
10 (1869) p. 229.

Nach von *Hesse* gegebenen symmetrischen Methoden leitet *Cayley*[1]) mittelst einer mühevollen und komplizierten Rechnung für die dreispitzige Hypocykloide die folgende in x, y, z symmetrische Gleichungen her, wobei er von ihm früher (Cambr. and Dublin Math. J. I. [1846] pag. 97—104) für die Entwicklungen von Koeffizienten der kubischen Form aufgestellte Tafeln benutzt.

$$\begin{aligned}
&4\,yz\,(y-z)^2 + 4\,zx\,(z^2+x^2+3\,yz-zx+5\,xy)\,b^3c\\
&4\,zx\,(z-x)^2 + 4\,xy\,(x^2+y^2+3\,xz-xy+5\,yz)\,c^3a\\
&4\,xy\,(x-y)^2 + 4\,yz\,(y^2+z^2+3\,yx-yz+5\,zx)\,a^3b\\
&\qquad + 4\,xy\,(x^2+z^2+3\,zy-xy+5\,zx)\,bc^3\\
&\qquad + 4\,yz\,(y^2+y^2+3\,xz-yz+5\,xy)\,ca^3\\
&\qquad + 4\,zx\,(z^2+x^2+3\,xy-zx+5\,yz)\,ab^3\\
&+ x\,(x^3-2x^2y-2x^2z+xy^2+38\,xyz+xz^2+12y^2z+12yz^2)\,b^2c^2\\
&+ y\,(y^3-2y^2z-2y^2x+yz^2+38\,xyz+yx^2+12z^2x+12zx^2)\,c^2a^2\\
&+ z\,(z^3-2z^2x-2z^2y+zx^2+38\,xyz+zy^2+12x^2y+12xy^2)\,a^2b^2\\
&\quad + 2\,yz\,(11x^2+y^2+z^2-2\,yz+24\,xy+zx)\,a^2bc\\
&\quad + 2\,zx\,(11y^2+z^2+x^2-2\,zx+24\,yz+xy)\,ab^2c\\
&\quad + 2\,xy\,(11z^2+x^2+y^2-2\,xy+24\,zx+yz)\,abc^2\\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

W. H. Besant[2]) stellt dieselbe Gleichung wie *Ferrers* auf. Nach ihm hat *Ferrers* den Satz, dass der Mittelpunkt der Hypocykloide der Mittelpunkt des Neunpunktekreises sei, zuerst ausgesprochen; doch hatte ihn *Steiner*, wie wir wissen, dreizehn Jahre früher in Crelles Journal veröffentlicht. In verbesserter Form erscheint die Gleichung unserer Kurve bei *Walton*[3]) und zwar symmetrisch unter Anwendung trilinearer Koordinaten.

Weitergehende Untersuchungen nahm, von derselben Erzeugung ausgehend, *L. Painvain*[4]) vor; wir denken dabei an die Fortsetzung der schon auf Seite 14 angeführten Arbeit.

---

[1]) Qu. J. (1868) p. 31—41 u. 175—176.

[2]) Qu. J. {10 (1869) p. 110—111. / 11 (1869) p. 38.

[3]) Qu. J. 9 (1869) p. 142—146.

[4]) Nouv. Ann. (2) 9 (1870) p. 202 u. 256.

Bezieht man die Gleichung unserer Kurve auf das von ihren drei Spitzen V_1, V_2, V_3 gebildete Dreieck und bezeichnet man ferner mit X, Y, Z die Entfernungen irgend eines Punktes der Ebene von den drei Seiten des Dreiecks $V_1 V_2 V_3$, so erhält man folgende Formeln: $X = x + \frac{3}{2} r$; $Y = -\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{3}{2} r$; $Z = -\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} y + \frac{3}{2} r$, woraus man ableitet: $X + Y + Z = \frac{9}{2} r$ und $x = \frac{3r(2X - Y - Z)}{2(X + Y + Z)}$, $y = \frac{3r\sqrt{3}(Y - Z)}{X + Y + Z}$

In diesem System ergibt sich als Gleichung der unendlich fernen Geraden $X + Y + Z = 0$. Setzt man die Werte für x und y in die bekannte Gleichung vierten Grades in cartesischen Koordinaten (vgl. Seite 12) ein, so ergibt sich eine Gleichung

$$(1) \quad X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2 = 2XYZ(X + Y + Z) \text{ oder}$$
$$(XY + YZ + ZX)^2 = 4XYZ(X + Y + Z)$$

Die erstere dieser beiden Formeln benutzt man, um zur Tangentialgleichung der Hypocykloide zu gelangen: Man sucht die Bedingung dafür, dass die Gerade

$$(2) \quad uX + vY + wZ = o$$

Tangente an diese Kurve ist. Dazu beachtet man, dass die Bedingung, für die die Gleichung vierten Grades $AX^4 + 4BX^3Y + 6CX^2Y^2 + 4DXY^3 + EY^4 = o$ zwei gleiche Wurzeln hat, folgende ist: $(AE - 4BD + 3C^2)^3 = 27(ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3)^2$.

Eliminiert man Z aus (1) und (2) und wendet auf die erhaltene Gleichung obige Beziehung an, dann findet man die gesuchte Bedingung:

$$(3) \quad (u + v + w)^3 = 27\, u \cdot v \cdot w,$$

wobei die Grössen u, v, w als Dreieckskoordinaten der Geraden $uX + vY + wZ = o$ in Bezug auf das Dreieck $V_1 V_2 V_3$ betrachtet werden; folglich stellt Gleichung (3) die Tangentialgleichung der Hypocykloide dar.

In dem übrigen Teile der umfangreichen Arbeit wird noch eine weitere Reihe von Sätzen, die sich bei *Cremona* finden, im

Anschlusse an diese Arbeit analytisch bewiesen. Erwähnt sei noch der Satz, dass das Quadrat der Potenz eines Punktes der Kurve in Bezug auf den „Richtkreis“ (vgl. S. 16), dividiert durch das Produkt der Abstände dieses Punktes von den Seiten des Dreiecks, das die drei Rückkehrpunkte zu Ecken hat, konstant und gleich dem 32fachen des Radius des Hauptkreises O (r) ist. Auch einen Beweis des Satzes, dass jede Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung, die die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat, eine dreispitzige Hypocykloide ist, hat *Painvain* gegeben.

Laguerre[1]) fügt in seinem Briefe an *Bourget* zu „*den schönen Sätzen von Steiner und Cremona, die von Herrn Painvain bewiesen sind*“ einige neue hinzu:

1. *Die drei Tangenten, die man an die Hypocykloide von einem Punkte aus ziehen kann, bilden mit irgend einer Rückkehrtangente Winkel, deren Summe ein Vielfaches von* π *ist.* Wir erwähnen speziell diesen Satz, weil er später in einem gänzlich anderen Zusammenhange (bei *Humbert*) wiederkehrt und deshalb von Interesse ist.

2. *Zieht man von einem Punkte* P *die drei Tangenten, deren Berührungspunkte* T_1, T_2, T_3 *seien, und verlängert man eine Tangente bis* T_1', *sodass* $PT_1' = 2PT_1$ *ist, so liegen die vier Punkte* P, T_1', T_2, T_3 *auf demselben Kreise und teilen seinen Umfang harmonisch.* Daraus folgt z. B. auch sofort, dass die Kurve nicht zwei parallele Tangenten haben kann.

In einer späteren Arbeit hat dann *Laguerre*[2]) noch eine weitere Behandlung der Kurve folgen lassen und zwar unter Einführung isotroper Koordinaten. Sind OX, OY die senkrechten Axen, und setzt man $x = X + iY$, $y = X - iY$, so kann man x, y als neue Koordinaten eines Punktes P betrachten; man sieht, dass die Gleichungen $x = \alpha$, $y = \beta$, wo α und β konstante willkürliche Grössen bezeichnen, die verschiedenen isotropen Geraden der Ebene darstellen. In einem solchen System ist der Richtungskoeffizient einer Geraden,

---

[1]) I. Nouv. Ann. (2) 9 (1870) p. 254—256.

[2]) II. Bull. de Soc. Math. de France 7 (1879) p. 108—124.

die mit der Axe OX einen gegebenen Winkel V bildet, gleich e^{-2iV}; die Gleichung der Axe OX ist $x = y$, die Gleichung eines Kreises vom Radius r mit dem Mittelpunkte (α, β) ist $(x - \alpha) \cdot (y - \beta) = r^2$. Ist nun eine Kurve n^{ter} Klasse gegeben, so sind die Richtungskoeffizienten einer Tangente, die man von einem Punkte (x, y) ziehen kann, gegeben durch eine homogene Gleichung $U(\lambda, \mu) = o$. In dieser Gleichung bezeichnet $\frac{\mu}{\lambda}$ den Richtungskoeffizienten der von dem Punkte (x, y) aus gezogenen Tangenten. Laguerre nennt diese Gleichung mit Beziehung auf frühere Arbeiten die „gemischte Gleichung". Da die Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten definiert ist als eine Kurve dritter Klasse, die die unendlich ferne Gerade in den beiden Kreispunkten berührt, so hat die „gemischte Gleichung" die Form: $a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3 + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = o$. Sucht man den Ort der Punkte der Ebene, von denen aus man die Hypocykloide unter einem rechten Winkel sieht, so erhält man dafür die Bedingung, dass die vorige Gleichung zwei gleiche Wurzeln mit entgegengesetzten Vorzeichen hat. Die Gleichung des Ortes lautet demnach: $(c - x)(b + y) = a \cdot d$. Sie stellt einen Kreis dar, den von uns mit C^2 (Radius r) bezeichneten. In dieser Weise werden noch andere Sätze abgeleitet.

Eine weitere Ausführung dieses Gedankens der Anwendung isotroper Koordinaten finden wir bei *Humbert*, welche Betrachtung aber nicht mehr in den Rahmen dieses Abschnittes gehört und deshalb erst später besprochen werden kann.

In einer kleinen Note stellt *Badoureau*[1]) in einer ein wenig anderen Weise die Gleichung (1) der Seite 36 auf, ohne sonst aber etwas neues hinzuzufügen.

Auf Grund der *Steiner*schen Erzeugung unserer Kurve gibt *Salmon*[2]) neben der Gleichung in cartesischen Koordinaten:

---

1) Nouv. Ann. (2) 18 (1877) p. 33.

2) Anal. Geom. d. höh. eb. Curven. 2. Aufl. 1882. p. 371.

$(x^2 + y^2)^2 + 8rx^3 - 24rxy^2 + 18r^2(x^2 + y^2) = 27r^4$ auch eine zweite Form, die sich auf die vorige zurückführen lässt:

$$x \sin(\alpha + \beta + \gamma - \vartheta) - y \cdot \cos(\alpha + \beta + \gamma - \vartheta) = \frac{1}{2} r \Big\{ \sin(\alpha + \beta + \gamma - 3\vartheta) + \sin(\beta + \gamma - \alpha - \vartheta) + \sin(\gamma + \alpha - \beta - \vartheta) + \sin(\alpha + \beta - \gamma - \vartheta) \Big\},$$

wobei α, β, γ die auf Seite 33 angegebene Bedeutung haben und ϑ der bekannte Distanzwinkel ist (vgl. S. 8). Eine lose Zusammenstellung einer Reihe bekannter Sätze, die die dreispitzige Hypocykloide betreffen, findet man in *H. Schottens*[1]) Dissertation.

Während die meisten bisher genannten Autoren nicht die einfachsten Mittel zur Behandlung unserer Kurve benutzten, werden in der Arbeit von *P. Perlewitz*[2]) die wichtigsten Eigenschaften der Hypocykloide auf elementar-geometrischem Wege entwickelt. Als Grundlage dienen der Untersuchung nur einige Sätze über den *Feuerbach*schen Kreis. Um die Arbeit genügend zu würdigen, müssten wir sie ausführlicher besprechen. Wir begnügen uns damit, darauf hinzuweisen, dass die Entwickelungen besonderes Interesse gewinnen beim Vergleiche mit einigen grösseren Arbeiten, wie denen von *Steiner* und *Cremona*.

Hierher gehört ferner in ihrer Fortsetzung die schon Seite 28 angeführte Arbeit von *A. Gob*[3]), aus der wir zur Charakterisierung einige Sätze hervorheben. Bezeichnet man die Längen der drei Tangenten, die von einem Punkte aus an die Hypocykloide gezogen werden können, mit t_1, t_2, t_3 und die zugehörigen Normalen [Länge bis zum Schnitt mit dem Kreise (3 r)] mit n_1, n_2, n_3 und sind α, β, γ die Winkel des Dreiecks A B C, so lassen sich folgende interessante Beziehungen ableiten:

---

[1]) Über einige bemerkenswerte Gattungen der Hypocykloiden. Diss. Marburg 1883.

[2]) Schulprogr. Sophienrealgymn. Berlin 1890.

[3]) Liège Mem. (3) 4. 1902.

(1) $t_1 = 4r \sin\alpha \sin\gamma$; (2) $n_1 = 4r(\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma)$.

Aus ihnen folgt weiter (3) $t_1 \sin\alpha = t_2 \sin\beta = t_3 \sin\gamma$ und (4) $t_1^2 - n_1^2 = t_2^2 - n_2^2 = t_3^2 - n_3^2 = 64r \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma$; (5) $\frac{n_1}{t_1} + \frac{n_2}{t_2} + \frac{n_3}{t_3} = 1$. Aus (1) folgt, dass der Punkt, von dem drei Tangenten ausgehen, der Schwerpunkt des aus den Normalen in den Berührungspunkten gebildeten Dreiecks ist. Aus der Formel (3) lässt sich der Satz entwickeln: Die Tangente durch einen Punkt der Hypocykloide, der aber nicht der Berührungspunkt ist, ist gleich der Hälfte der Projektion des Krümmungsradius in jenem Punkte auf diese Tangente. Aus den obigen Formeln lässt sich noch eine Reihe anderer Beziehungen ähnlicher Art ableiten, worauf wir aber nicht weiter eingehen.

Auch *J. Neuberg*[1]) bringt in seinen Notes sur l'hypocycloïde einige weitere Eigenschaften und neue Beweise im Anschluss an bekannte Resultate.

IV. b. Bei den im ersten Teile (vergl. Seite 6) angedeuteten Modifikationen der Erzeugung durch die *Wallace*sche Gerade handelt es sich meist um Aufgaben in den Nouvelles annales.

So behandelt *Millasseau*[2]) 1869 die von *Brocard* gestellte Aufgabe: Es ist ein Kreis C^2 gegeben (Fig. 8), der eine Gerade in dem Punkte H_3 berührt. Von einem Punkte M des Umfanges ziehe man MM_j senkrecht zu $H_3 M_j$ und mache $H_3 M_j$ gleich AB auf der Geraden. Gefragt ist nach der Enveloppe der Verbindungslinien der Punkte B und M.

Die Lösung wird analytisch gegeben und führt zu der schon bekannten Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 + 8rx(3x^2 - y^2) + 18r^2(x^2 + y^2) - 27r^4 = o.$$

Wir werden sogleich noch eine kleine von *Brocard* gegebene Abänderung, die später *Cahen* ausführlicher behandelte, kennen lernen.

---

[1]) Liège Mém. (3) 6. 1906.

[2]) Nouv. Ann. (2) 8 (1869) p. 418.

P. Serret[1]) gab demselben Problem noch eine andere Form in folgender Weise (Fig. 9). Es sei wieder das Dreieck ABC mit dem Höhenschnittpunkt H gegeben und A_0, B_0, C_0 seien die Symmetriepunkte des Punktes H in Bezug auf die Seiten des Dreiecks. Diese Punkte liegen bekanntlich auf dem umschriebenen Kreise. Daraus folgt nun, dass zwei in *einer* Linie liegende, aber entgegengesetzt gerichtete Lichtstrahlen, die durch H gehen, an zwei Seiten des Dreiecks gebrochen werden, dass die gebrochenen Strahlen sich in einem Punkte F des umschriebenen Kreises schneiden. Die zu dem einfallenden Strahle durch den Punkt F gezogene Parallele ist auch parallel der Geraden, die die Projektion von F auf die Seiten des Dreiecks enthält, und die Entfernungen dieser beiden Geraden von dem festen Punkte H stehen untereinander in dem Verhältnis 2 : 1. Es ist leicht zu sehen, dass die beiden Geraden zwei homothetische Hypocykloiden einhüllen. Man sieht auch, dass der durch H gehende Lichtstrahl und der parallele Strahl durch F die in einem Satze von *Perlewitz* als „Begleitlinien" der *Wallace*schen Geraden bezeichneten Geraden sind. Der eine der betreffenden Sätze bei *Perlewitz*[2]) lautet: „*Während die Fusspunktlinie die erwähnte Kurve umhüllt, geht die zu ihr parallele „Begleitlinie" beständig durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks*".

Die oben angedeutete Änderung in der von *Brocard*[3]) gestellten Aufgabe besteht darin, dass die gegebene Gerade den Kreis C^2 nicht nur berührt, sondern schneidet. Der Zusammenhang mit dem bekannten Problem wird schnell klar, wenn man die Figur 8b in der Weise vervollständigt, dass der gegebene Kreis der *Feuerbach*sche eines Dreiecks wird, dessen eine Seite AB die gegebene Gerade ist. Die Gerade BM wird die zweite Seite BC des Dreiecks; sie ist (nach *Steiner*) ebenfalls Tangente.

---

1) Nouv. Ann. (2) 9 (1870) p. 73—84. [I]

2) Bull. d. l. Soc. Math. de France 1 (1872/73) p. 224—226. [I]

3) Schulprogr. Sophienrealgymn. Berlin 1890. Vergl. Seite 39.

Von dieser Aufgabe ausgehend, hat *Ch. Ph. Cahen*[1]) eine ausführliche Behandlung der Hypocykloide unternommen unter häufiger Bezugnahme auf die *Cremona*sche Arbeit. Die Sätze sind meist mit den Mitteln der elementaren Geometrie bewiesen; auch wird ein einfacher Beweis gegeben, dass die aus dieser Aufgabe entstandene Kurve die auch durch Rollen zu erzeugende Hypocykloide ist.

Eine Abänderung etwas anderer Art stellt die von *Neuberg* gegebene und von *Jérabeck*[2]) gelöste Aufgabe dar: Man projiciere einen Punkt F auf die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC, die Projektionsstrahlen bzgl. parallel CA, AB, BC oder AB, BC, CA; A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 seien die Projektionen. Es ist der Ort des Punktes F zu finden, so dass A_1, B_1, C_1 in gerader Linie liegen. Die Punkte A_2, B_2, C_2 liegen dann auf einer zweiten Geraden. Gesucht ist der Ort des Schnittpunktes P dieser beiden Geraden. Der Ort von F ist ein ABC umschriebener Kegelschnitt, der von P eine dreispitzige Hypocykloide.

Von dem bekannten Satze ausgehend: „*Wenn drei Tangenten einer dreispitzigen Hypocykloide zusammenlaufen, so bilden die zu ihnen senkrechten Tangenten ein Dreieck, das die drei ersten Tangenten zu Höhen hat,*“ gelangt *P. A. Mac Mahon*[3]) zu dem allgemeineren: „*Zieht man von den Ecken eines von drei Tangenten einer dreispitzigen Hypocykloide gebildeten Dreiecks (Fig. 10) die dritten Tangenten, so bilden sie gleiche Winkel mit den Gegenseiten, und der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises des so gebildeten Dreiecks fällt zusammen mit dem Höhenschnittpunkte des Dreiecks.*“ In einem Dreiecke ABC ziehe man unter gleichen Neigungswinkeln gegen die gegenüberliegenden Seiten die Geraden AG, BH, CK, die das Dreieck DEF bilden. Da die Fusspunkte der von einem Punkte des ABC umschriebenen Kreises nach den Seiten gezogenen Geraden, die mit diesen gleiche Winkel bilden,

---

1) Nouv. Ann. (2) 14 (1875) p. 21—31.

2) Mathes., Recueil math. 2 (1882) p. 42.

3) Mess (2) 12 (1882) p. 151—153.

in einer geraden Linie liegen und die Enveloppe dieser Linie die dreispitzige Hypocykloide ist, so folgt, dass die Seiten der Dreiecke ABC und DEF Tangenten an dieselbe Hypocycloide sind. Und es lässt sich ferner zeigen, dass der Mittelpunkt des Kreises DEF der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist. Wir sehen, dass wir hier auch eine Abart der Schar von Fusspunktlinien des Dreiecks vor uns haben, deren Enveloppe unsere Kurve ist.

Mit ähnlichen Gebilden haben wir es bei den *„pédales obliques“* in der schon mehrfach genannten Arbeit von *A. Gob* (1906) zu tun, wo die Projektionsstrahlen von einem Punkte F des ABC umschriebenen Kreises um einen Winkel α um F gedreht sind. Wie übrigens *Gob* angibt, ist ihm von *Neuberg* der Beweis dafür mitgeteilt worden, dass die so entstandene Enveloppe auch wieder eine Hypocykloide ist, woraus weitere Folgerungen sich ergeben.

§ 5.

Die bisher angeführten Untersuchungen unserer Kurve, von der Erzeugung durch Rollen an bis zu den schiefen Fusspunktlinien, bilden gewissermassen eine Gruppe für sich. Dasselbe lässt sich sagen von den nun folgenden Betrachtungen, die über den Zusammenhang dieser merkwürdigen Kurve mit den Kegelschnitten Aufschluss geben. **C. V. a. u. b.**

In der oft genannten Arbeit von *Steiner*, die hier als Anhang abgedruckt ist, finden wir schon eine grosse Anzahl von Beziehungen unserer Kurve zu den Kegelschnitten aufgestellt.

Wichtig ist auch die von *J. Steiner* in den *„Vermischten Sätzen und Aufgaben“* [1]) angegebene Erzeugung der Kurve: *„Die Axen aller einem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Parabeln umhüllen eine spezielle Kurve dritter Klasse und vierten Grades, welche die Gerade* g_∞ *zur ideellen Doppeltangente und drei Rückkehrpunkte hat; nämlich die Kurve ist eine bestimmte dreispitzige oder dreibogige Hypocykloide; ihre*

---

1) Crelle 55 (1858) p. 356—378 bes. p. 371.
Ges. Werke II p. 677, 678.

drei Rückkehrtangenten treffen sich im Mittelpunkte des dem Dreieck umschriebenen Kreises unter gleichen Winkeln und sind gleich lang und zwar dem dreifachen Radius des Kreises gleich; die drei Rückkehrpunkte liegen daher in einem mit dem letzteren konzentrischen Kreise; derselbe ist die Basis der Hypocykloide und der sie erzeugende rollende Kreis ist gerade dem erstgenannten Kreise gleich. Die weiteren merkwürdigen Eigenschaften dieser Cykloide sind bereits in einem früheren Aufsatze dieses Journals Bd. 53 angegeben."

Das in Betracht kommende Dreieck ist hier nicht das mit ABC bezeichnete, sondern das diesem eingeschriebene $A_1 B_1 C_1$, das man erhält, wenn man die Mitten der Seiten des Dreiecks ABC mit einander verbindet. Diesem Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ ist der Feuerbachsche Kreis C^2 (Radius r) des Dreiecks ABC umschrieben, der der Ort der reellen Brennpunkte aller dieser Parabeln ist. (Hiermit ist der Zusammenhang mit den früheren Figuren und Bezeichnungen hergestellt). Noch in demselben Jahre, in dem *Steiner*s Abhandlung erschien, veröffentlichte *H. Schröter* [1]) in demselben Journal eine Arbeit „über die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde." Wir haben im ersten Teil die *Schröter*sche Erzeugung unserer Kurve kennengelernt und können sie an die eben angeführte Erzeugung von *Steiner* als Enveloppe der Axen von Parabeln anschliessen, weil die Brennpunkte M und N der eingeschriebenen Parabeln der krummen Punktreihe auf dem Kreise C^2 bzw. der Punktreihe auf der unendlich fernen Geraden entsprechen. (Fig. 5.)

Dass die Punktreihe M' (gleich N) auf der unendlich entfernten Geraden g_∞ (bestimmt durch die Richtungen $A_1 M'$) und die krumme Punktreihe M auf dem Kreise C^2 als projektive Punktreihen aufgefasst werden können und dass dann die Verbindungslinien (Projektionsstrahlen) je zweier entsprechenden Punkte die Kurve dritter Klasse einhüllen, erörtert *Schröter* an einer Betrachtung von Strahlenbüscheln im Endlichen: „*Verbindet man einerseits einen beliebigen festen Punkt* A_1 *des Kreises mit dem veränderlichen Punkte* M_x *und andrer-*

[1]) Crelle 54 (1857) p. 31 u. f.

seits einen beliebigen festen Punkt A_1 der Ebene mit dem jedesmal entsprechenden M'_x, *so erhält man zwei gewöhnliche Strahlenbüschel* $A_1 M_x$ *und* $A_1 M_x$, *welche zufolge der Konstruktion projektivisch gleich, aber ungleich liegend sind; mithin sind es auch die Gebilde* M_x *und* M'_x *selbst, deren projektivische Beziehungen auf jene zurückgeführt werden. Aus dieser Definition der besonderen Kurve dritter Klasse folgen ohne Schwierigkeit die Haupteigenschaften derselben.*"

Schröter leitet eine Reihe derselben ab für den allgemeinen Fall, dass nicht der Kreis C^2, sondern ein beliebiger Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ die krumme Punktreihe bildet. Die meisten der erhaltenen Sätze haben natürlich auch für unsere Kurve Gültigkeit. So überträgt sich in erster Linie der Satz, dass unsere Kurve dritter Klasse ist. Der Beweis wird mit Hilfe eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}^2$ in unserem Falle einer gleichseitigen Hyperbel geführt, weil diese das Erzeugnis zweier gleichen und ungleich liegenden Strahlenbüschel ist. Da die Schnittpunkte von $\mathfrak{K}^2$ mit der Geraden g_∞, die Doppeltangente an die Kurve dritter Klasse ist, imaginär sind, so ist die unendlich ferne Gerade g_∞ die Doppeltangente unserer Hypocykloide. *Steiner* hatte die Frage nach der Zahl der Kegelschnitte, die durch vier gegebene Punkte gehen und einen beliebigen Kegelschnitt berühren, schon früher (Crelle Bd. 37, S. 189 u. Ges. Werke, Bd. II, S. 417) dahin beantwortet, dass es im allgemeinen sechs solche Kegelschnitte gibt; wenn aber der zu berührende Kegelschnitt durch einen der vier gegebenen Punkte hindurchgeht, so fallen in dem Kegelschnitt, welcher durch die drei anderen geht und in dem vierten den gegebenen Kegelschnitt berührt, zwei Lösungen der Aufgabe zusammen, und es bleiben nur noch vier andere Kegelschnitte übrig, welche der Aufgabe Genüge leisten. Dies findet gerade in unserem Falle statt, folglich ist die Kurve dritter Klasse vom vierten Grade. Hierfür liefert *Schröter* noch einen Beweis.

Ausführlicher hat *L. Cremona*[1]) die mit unserer Kurve verbundenen Kegelschnitte behandelt. Wir führen einige der wichtigsten Sätze an:

---

[1]) Crelle 64 (1864) p. 101—123.

„*Man kann zwei senkrechte Tangenten* gg_1 *der Hypocykloide als Asymptoten eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln betrachten, die im Unendlichen eine doppelte Berührung haben und unter die man das Paar Gerader* gg_1 *mitzählen muss (gleichzeitige Hyperbel mit einem Doppelpunkte); ebenso betrachtet man die unendlich ferne Gerade als ein System zusammenfallender Geraden (gleichseitige Hyperbel mit einer Unendlichkeit von Doppelpunkten). Einem anderen Paare wird ein anderes Büschel gleichseitiger Hyperbeln entsprechen; und die beiden Büschel haben eine Hyperbel gemeinsam (die unendlich ferne Gerade).*“

„*Alle gleichseitigen, den Paaren senkrechter Tangenten der Hypocykloide entsprechenden Hyperbeln dieser Büschel bilden ein geometrisches Netz, d. h. man kann durch zwei willkürlich gewählte Punkte eine einzige gleichseitige Hyperbel gehen lassen, deren Asymptoten Tangenten an die Hypocykloide sind.*“

„*Die Doppelpunkte der Hyperbeln des Netzes sind die Mittelpunkte der Asymptoten (d. h. die Mittelpunkte der Hyperbeln) und die Punkte der unendlich fernen Geraden; diese bilden also mit dem Kreise* C^2 *als Ort der Mittelpunkte aller dieser gleichseitigen Hyperbeln die Hessesche Kurve des Netzes.*“

„*Die Gerade* g *ist auch die Scheiteltangente einer Parabel* N^2, *die ihren Brennpunkt in* F *hat und dem Dreieck* ABC *eingeschrieben ist.* N^2 *und* N (vergl. Seite 45) *erzeugen projektive Punktreihen.*“

„*Ferner sind Parabeln* P^2 *bestimmt durch je vier Tangenten in den vier Punkten, in denen irgend eine Gerade die Hypocykloide schneidet;* P *ist die Polarenveloppe dieser Geraden in Bezug auf* C_3^4, *ihre Leitlinien hüllen unsere Kurve ebenfalls ein.*“

„*Es gibt ein Netz von* P^2. *Alle einem Bündel paralleler Geraden entsprechenden Parabeln* P^2 *haben denselben Brennpunkt und dieselbe Axe. Die Hessesche ist Enveloppe der Axen aller Parabeln* P^2. *Schliesslich haben wir noch eine Schar von Parabeln* Π^2, *die Hypocykloide ist die Einhüllende ihrer Axen; der Kreis* C^2 *ist der Ort ihrer Brennpunkte.*“

„Der Kreis C^2 *und die Parabel* Π^2 *sind reciproke Polaren in Bezug auf gleichseitige Hyperbeln."*

„Endlich wollen wir noch die Kegelschnitte E^2 *anführen, die die Seiten des Dreiecks* ABC *berühren und durch* H, *den Höhenschnittpunkt gehen."* E^2 sind die auch von *Steiner* angeführten Kegelschnitte, auf die eine Erzeugung der Kurve gegründet wird.

Um die Sonderstellung der *Cremona*schen Arbeit genügend zu würdigen, muss man beachten, dass *Cremona* nicht von einer bestimmten Erzeugungsweise wie fast alle anderen Autoren ausgeht. Er sagt vielmehr: „Es sei C_3^4 eine Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung, welche die unendlich ferne Gerade in zwei Punkten Ω_1 und Ω_2 berührt, die auf einem Kreise liegen." Und nun werden alle Eigenschaften aus der Theorie der Kurven entwickelt, wie sie von *Hesse* und *Cayley* begründet und von *Cremona* zusammenfassend dargestellt worden ist in seinem Buche: *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane (Bologna 1862).* Man kann sogar sagen, dass die Abhandlung *Cremonas* über die Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten in Crelles Journal ein spezielles Beispiel zu dem genannten Werke bietet. Bemerkenswert ist der von *Cremona* zuerst bewiesene Satz: „. . . . *Ainsi toute courbe de troisième classe et quatrième ordre, dont la tangente double soit à l'infini et les points de contact sur un cercle, est nécessairement une hypocycloïde à trois rebroussements. Cette courbe joue donc, parmi les courbes de la troisième classe et du quatrième ordre, le même rôle que le cercle parmi les coniques."*

Es sei noch bemerkt, dass *A. Clebsch*[1]) in einer Note zu der *Cremona*schen Abhandlung einen analytischen Beweis für folgenden Satz gegeben hat, den man auch in dem Buche von *Loria*[2]) angegeben findet: „*Wenn man bei einer Kurve dritter Klasse, welche eine Doppeltangente besitzt, deren Berührungspunkte* ($u = o$, $v = o$) *und den Schnittpunkt der übrig*

[1]) Crelle 64 (1864) p. 124.

[2]) a. a. O. p. 149.

bleibenden drei Rückkehrtangenten ($w = o$) *zu den Ecken eines Koordinatendreiecks wählt, so kann man die Koordinaten einer Tangente durch die Gleichungen* $u = \mu\lambda^2$; $v = \mu^2\lambda$; $w = \mu^3 + \lambda^3$, *den zugehörigen Berührungspunkt aber durch* $x = \mu^4 - 2\mu\lambda^3$; $y = \lambda^4 - 2\mu^3\lambda$; $z = \mu^2\lambda^2$ *darstellen, wo* $\frac{\lambda}{\mu}$ *ein willkürlicher Parameter ist. In den letzten Gleichungen braucht man nur* $\lambda = \rho e^{\frac{i\varphi}{2}}$, $\mu = -\rho e^{\frac{-i\varphi}{2}}$ *und zugleich* $\frac{y + x}{2z} = \xi$, $\frac{y - x}{2iz} = \eta$ *zu setzen, um die Gleichungen der Hypocykloide zu erhalten:* $\begin{cases} \xi = \cos 2\varphi + \cos 2\varphi \\ \eta = \sin 2\varphi - \sin 2\varphi \end{cases}$. *Je zwei Tangenten, welche sich nur durch das Vorzeichen von* λ *unterscheiden, sind konjugiert, und durch ihre Berührungspunkte geht eine dritte Tangente, bei welcher* $-\frac{\mu^2}{\lambda^2}$ *an Stelle von* $\frac{\lambda}{\mu}$ *getreten ist.*"

Während bisher die Kurve meistens als Einhüllende gewisser gerader Linien (Parabelaxen etc.) dargestellt wurde, wird in einer Arbeit von *Siebeck*[1]) eine Konstruktion durch Bewegung eines Punktes gegeben. Die Arbeit ist durch die *Schröter*sche angeregt worden und geht von dem folgendem Grundgedanken aus: „*Lässt man die Punkte zweier sich wenigstens in zwei reellen Punkten schneidender Kegelschnitte so entsprechen, dass je zwei entsprechende Punkte mit einem der Durchschnittspunkte der Kegelschnitte in gerader Linie liegen, so erhält man eine besondere Art projektiver Punktreihen, welche man perspektivisch nennen könnte, und welche das Eigentümliche haben, dass, wenn man in je zwei einander entsprechenden Punkten Tangenten legt, die durch den Durchschnittspunkt der letzteren gebildete Kurve zwar vierter Ordnung aber nicht von der sechsten Klasse ist, wie es bei der allgemeinen Annahme projektivischer Punktreihen der Fall sein müsste, sondern nur von der dritten Klasse.*" Nachdem für diesen Satz ein Beweis geliefert worden ist, werden die Folgerungen

1) Crelle 66 (1866) p. 344.

gezogen: Die Kurve C_3^4 ist der Ort der in Bezug auf das Fundamentaldreieck genommenen Pole der Tangenten eines diesem Dreieck umschriebenen Kegelschnitts. Der durch die drei Rückkehrpunkte und die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente einer Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung gehende und somit völlig bestimmte Kegelschnitt ist der Ort der in Bezug auf das von den Rückkehrpunkten gebildete Dreieck genommenen Pole der Kegelschnitte der Schar $B(H^2)$, (in unserem Falle der gleichseitigen Hyperbeln). Die Kurve C_3^4 selbst aber ist der Ort der Pole der Tangenten dieses Kegelschnittes.

„*Verschiedene Eigenschaften zu beweisen, die sich auf eine Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung beziehen und von Steiner angegeben sind,*" ist der Zweck einer Mitteilung von *Battaglini.*[1]) Hierzu geht *Battaglini* von einem allgemeinen Kegelschnitt K^2 aus (im Gegensatz zu dem speziellen, dem Kreise C^2). Auf ihm werden drei Punkte U_1, U_2, U_3 angenommen. Die Tangenten an K^2 in diesen Punkten schneiden sich mit den Geraden U_2U_3, U_3U_1, U_1U_2 in drei Punkten, die in einer Geraden g liegen. Die Schnittpunkte von g mit K^2 seien E und F, G der Pol von g in Bezug auf K^2; ferner seien M und M zwei Punkte von K^2, so dass bezüglich der Terne (FU_1, FU_2, FU_3) FM die harmonische Gerade erster Ordnung von $F\mathsf{M}$ ist und $F\mathsf{M}$ eine harmonische Gerade zweiter Ordnung von FM, folglich EM die harmonische Gerade erster Ordnung von $E\mathsf{M}$ und $E\mathsf{M}$ harmonische Gerade zweiter Ordnung von EM. Ist schliesslich M_1 ein Punkt, in Bezug auf den M einer der harmonischen Punkte zweiter Ordnung bzgl. (U_1, U_2, U_3) ist, so ergibt sich aus allen diesen Beziehungen, dass die Geraden (M, M) $(M, -\mathsf{M})$ und (M, M_1) die Kurve Γ_3^4 einhüllen. (Wenn der Kegelschnitt ein Kreis ist, so treten entsprechende Vereinfachungen ein.)

„*Denkt man sich zwei Gebilde der Art, dass jedem Elemente des einen ein Elementenpaar des andern (projektiven) Gebildes entspricht, während jedem Elemente des letzteren nur*

[1]) Giorn. Battagl. 4 (1866) p. 214—222.

ein einziges Element des ersteren entspricht, so gelangt man zu geometrisch verwandten Gebilden, die man analogerweise zwei-eindeutige Gebilde nennen kann.“ Aus dieser Definition wird in der Theorie der mehrdeutigen Elementargebilde von *E. Weyr*[1]) der Satz gewonnen: „Jede Kurve dritter Klasse mit einer Doppeltangente ist das Erzeugnis unendlich vieler Paare ein-zweideutiger Reihen. Die den einzelnen Punkten auf der Doppeltangente einer C_3^4 zugeordneten Punktwerte bilden mit ersteren zwei koaxiale ein-zweideutige Punktreihen. Die drei Doppelpunkte der beiden Reihen liefern die drei Rückkehrtangenten der Kurve.“ Der sogenannte „Reduktionskegelschnitt“ ist für unsere Kurve ein Kreis. Weiter wird im Anschlusse an die allgemeine Aufgabe: „*Von einer Kurve dritter Klasse ist die Doppeltangente gegeben und sechs weitere Tangenten, man soll die Kurve konstruieren,*“ eine Reihe von Aufgaben für besondere Fälle gestellt, z. B. von einer Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten sind vier Tangenten gegeben, man soll dieselbe konstruieren, so wie zu den Tangenten die Berührungspunkte bestimmen: wir wissen schon, dass tatsächlich durch vier Tangenten unsere Kurve bestimmt ist. Man kann auch drei Tangenten geben und den Berührungspunkt einer, dann ist die Aufgabe ebenfalls bestimmt, oder zwei Tangenten und zwei Berührungspunkte, oder eine Tangente, einen Rückkehrpunkt und dessen Tangente.

Kurz erwähnen wollen wir an dieser Stelle noch den § 3 aus der schon angeführten Arbeit von *L. Painvain*[2]). Die Tangentialgleichung der Hypocykloide war $(u+v+w)^3 = 27\,(uvw)$. Will man die Gleichung der ersten Polare einer Geraden u_0, v_0, w_0 in Bezug auf die Hypocykloide herstellen, so kann dies mit Hilfe dieser Gleichung geschehen, denn man weiss, dass sie in Bezug auf die Kurve $F\,(u, v, w) = o$ die Gleichung hat $u_0 \cdot \frac{dF}{du} + v_0 \cdot \frac{dF}{dv} + w_0 \cdot \frac{dF}{dw} = 0$. Demnach ergibt sich für die erste Polare die Gleichung:

$$(u_0 + v_0 + w_0)\;(u + v + w)^2 = 9\;(u_0 vw + v_0 wu + w_0 uv).$$

[1]) Theorie der mehrdeut. Geometrie, Leipzig 1869.

[2]) Nouv. Ann. (2) 9 (1870) p. 202 u. 256.

Diese stellt eine Parabel dar, denn sie wird von der unendlich fernen Geraden berührt, deren Gleichungen hier durch u = v = w gegeben sind. Im Anschluss an *Cremona*sche Sätze wird dieser Gegenstand nun weiter ausgeführt.

Ebenfalls um „*Cremonasche Sätze analytisch zu beweisen,*" benutzt auch *P. Serret*[1]) Kegelschnitte. Einen interessanten Satz führen wir aus dieser Arbeit an: „En résumé: la tangente au sommet et l'axe des paraboles inscrites, chacun des axes principaux et chaque des asymptotes des hyberboles équilatères conjugées ou circonscrites à un triangle, roulent sur autant d'hypocycloïdes de module $\frac{1}{3}$."

Wir entnehmen ferner dem schon angeführten Briefe *Laguerres*[2]) an *Bourget* den folgenden Satz: „*Zieht man von einem Punkte* P *der Hypocykloide die Tangente an die Kurve, deren Berührungspunkt nicht mit* P *zusammenfällt, bezeichnet mit* T *den Berührungspunkt dieser Tangente und verlängert* TP *um sich selbst, so ist das Ende* T' *dieser Verlängerung der Brennpunkt der Parabel, die die Hypocykloide überosculiert.*"

Eine Ergänzung zu der erwähnten Arbeit von *Siebeck* hat *W. Frahm*[3]) gegeben in dem Sinne, dass er die *Siebeck*sche Methode analytisch begründet. Es ist ein Dreieck gegeben, dem zwei Kegelschnitte umschrieben sind. Diese schneiden sich in einem vierten Punkte, der reell ist, wenn das Dreieck als reell vorausgesetzt wird. Zieht man dann durch diesen vierten Punkt Sehnen, welche die Kegelschnitte in F_1 und F_2 zum zweiten Male treffen, so wird verlangt, den Ort der Schnittpunkte der Tangenten in den Punkten F_1 und F_2 der beiden Kegelschnitte anzugeben. Zur Lösung der Aufgabe wird das Dreieck als Koordinatendreieck für ein homogenes System genommen. Man erhält durch Rechnung die Kurve C_3^4, ferner dieselbe Schar von Kegelschnitten, die durch eine

1) Nouv. Ann. (2) 9 (1870) p. 73—84. [I]
2) Nouv. Ann. (2) 9 (1870) p. 254—256. [I]
3) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 18 (1873) p. 363—387.

gewisse Reihe von Eigenschaften ausgezeichnet sind, und schliesslich die speziellen Eigenschaften unserer Kurve. So ist die Tangentialgleichung derselben in rechtwinkligen Linienkoordinaten $3\, uv^2 - u^3 - \frac{u^2 + v^2}{r} = o$.

Nur mit den Hilfsmitteln, welche die Geometrie der Lage bietet, hat auch *H. Milinowski*[1]) die Eigenschaften unserer Kurve abgeleitet. Er geht aus von einem Kegelschnitt K^2, mit dem auf ihm liegenden festen Punkt S, durch den zwei Gerade q, r gehen. Aus der Projektivität von Strahlenbüscheln kann man dann schliessen: „Alle Geraden, deren Schnittpunkte mit q und r ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden g und mit K^2 harmonisch trennen, werden von einer Kurve dritter Klasse eingehüllt, die g doppelt und K^2 dreifach berührt. In unserem Falle ist g die unendlich ferne Gerade und K^2 der Kreis C^2. Zum Schlusse werden die Beziehungen zwischen Kreis und Dreieck elementar hergeleitet.

Gelegentlich geometrischer Uutersuchungen über die Ellipse führt *S. Kantor*[2]) einen Satz beiläufig an, der auf den Kreis übertragen lautet: Ist ein Punkt A_1 auf dem Kreise C^2 gegeben, verbindet man A_1 mit irgend einem veränderlichen Punkte M des Kreises und zieht durch M eine zu $A_1 M$ bezüglich eines festen Durchmessers symmetrische Gerade g, so ist die Einhüllende von g die *Steiner*sche Hypocykloide. Dieser Satz ist augenscheinlich nichts anderes, als die von *Schröter* angegebene Konstruktion, wenn auch in anderer Form.

Die gleiche geometrische Grundlage weist eine Arbeit von *M. Trebitscher*[3]) auf. In ihr wird der Ort der Axen der Kegelschnitte eines Büschels aufgefasst als das Erzeugnis der Verbindungslinien entsprechender Punkte auf zwei Linien, von denen die eine die unendlich ferne Gerade, die andere der von den Zentren aller Kegelschnitte des Büschels erzeugte

---

1) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19 (1874) p. 115—137.

2) Zeitschr. f. Math. u. Phy. 23 (1878) p. 414. [I] u. 25 (1880) p. 54.

3) Wien. Ber. 81 (1882).

Kegelschnitt ist. In unserem Falle wird dieses Büschel von gleichseitigen Hyperbeln gebildet.

An dieser Stelle ist noch zu erwähnen, dass die dreispitzige Hypocykloide in *Salmons* „*Analyt. Geom. d. höh. eb. Kurven*“ [1]) ausser unter den Cykloiden noch unter den Kurven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten behandelt wird. Solche erlauben eine rationale Parameter-Darstellung durch Einführung eines Büschels von Kegelschnitten, welches durch die drei Doppelpunkte geht. Nach der analytischen Darstellung folgt die geometrische Erörterung, der wir für den hier in Betracht kommenden Fall folgendes entnehmen: „Der Kegelschnitt schneidet jede Seite des Fundamentaldreiecks z. B. $V_2 V_3$ in zwei Punkten; denselben entsprechen zwei zu V_1 in bestimmten Richtungen benachbarte Elemente, d. h. also die Tangenten der Kurve vierter Ordnung im Doppelpunkte V_1. Je nachdem also der Kegelschnitt die Gerade $V_2 V_3$ in zwei nicht reellen oder in zwei reellen Punkten schneidet oder in einem Punkte berührt, hat die Kurve vierter Ordnung in V_1 einen isolierten Punkt, einen Knotenpunkt oder eine Spitze; dasselbe gilt für die anderen Seiten und Ecken. Wenn z. B. eine Ellipse oder ein Kreis dem Fundamentaldreieck eingeschrieben ist, so hat die Kurve vierter Ordnung drei Spitzen in den Fundamentalpunkten.“

Nebenbei erwähnen wir eine Arbeit von *J. Dörholt* [2]) „*Über einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte*“. Im letzten Paragraphen seiner Dissertation gelangt *Dörholt* zu der Enveloppe der Axen der einem Dreieck $A_1 B_1 C_1$ eingeschriebenen Parabeln Π^2. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, dass die Grundlage der Betrachtung für diesen Fall die Theorie der Kegelschnitte von *Steiner* [3]) bildet: der Ort der Brennpunkte der einem Dreiecke eingeschriebenen Parabeln ist der diesem Dreiecke umschriebene Kreis; die *Wallace*schen Geraden bilden die Scheiteltangenten. Konstruiert man

---

[1]) 2. Aufl. 1887 p. 338 Art. 285.

[2]) Diss. Münster 1881. [l]

[3]) Herausgegeben von *F. Geiser*, 2. Aufl. 1875, S. 121.

das diesem Dreiecke parallel umschriebene ABC, so sind die dem letzteren entsprechenden *Wallace*schen Geraden senkrecht zu den vorigen, also Axen der Parabeln und also auch Einhüllende unserer Hypocykloide.

Wie schon mehrfach, finden wir in den Nouvelles Annales auch dieses Problem in Form einer Aufgabe, die hier von einem Ungenannten und von *E. Barisien*[1]) gelöst ist. Es werden alle Kegelschnitte betrachtet, die einen gegebenen Punkt zum Brennpunkte haben und durch zwei gegebene Punkte B und C gehen. Nimmt man die Punkte B und C auf den Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystems an, fällt von A auf BC das Lot, das BC in H_1 trifft und legt durch H_1 und den Anfangspunkt A einen Kreis, so erhält man wieder den bekannten Kreis C^2. H_1 ist Brennpunkt der Parabel; AH_1 ist ihre Axe, deren Enveloppe die dreispitzige Hypocykloide ist. Hält man den andren Schnittpunkt M von BC mit dem Kreise fest und dreht BC um diesen Punkt, so wandert, da AH_1 das Lot auf BC war, der Punkt H_1 auf dem Kreise, und wir erhalten alle Parabeln Π^2. Neben dieser geometrischen Lösung des ungenannten Verfassers steht eine analytische von *Barisien.*

Was eine frühere Behandlung des Themas durch *Steiner* betrifft, so hatten wir bei Besprechung seines Vortrages uns (vgl. S. 29) auf *W. Fiedler*[2]) berufen. Es handelt sich dabei um eine gewisse geschichtliche Entwicklung, an der *Steiner* wesentlich beteiligt ist. Wir erhalten von *Fiedler* ein Bild über den Zusammenhang zwischen dem Büschel gleichseitiger Hyperbeln, dem *Feuerbach*schen Kreise und der *Steiner*schen Hypocykloide. Der Inhalt ist kurz folgender:

Brianchon und *Poncelet* behandelten 1821 in *Gergonne*s Annalen die gleichseitige Hyperbel nach ihrer Konstruktion aus vier Elementen und gaben unter anderem den Satz: „*Die gleichseitigen Hyperbeln, welche durch die Ecken* A, B, C *eines Dreiecks gehen, haben den Kreis der Mitten der Seiten des*

1) Nouv. Ann. (3) 7 (1888) p. 248 u. 244.

2) Viertelj. Schr. d. nat. Ges. Zürich 30 (1885) p. 390.

Dreiecks zum Ort ihrer Mittelpunkte, alle diese Hyperbeln gehen durch den Höhenschnittpunkt H *des Dreiecks.*“ (Der Kreis geht auch durch die Mitten der Höhenabschnitte zwischen Eckpunkt und Höhenschnittpunkt und auch durch die Fusspunkte der Höhen. Deshalb hat er später den Namen Neunpunktekreis erhalten.)

Mit Hilfe dieses Kreises konstruierten *Brianchon* und *Poncelet* die gleichseitigen Hyperbeln Die Abhandlung ist 1828 und 1843 durch *Bobilier* bzw. *Seydewitz* erweitert worden. Zu gleicher Zeit bewies *Feuerbach* (1822) seine Sätze über den nach ihm benannten Kreis. *Steiner* verallgemeinerte 1828 (*Gergonne*s Ann. 29) das Problem auf den Mittelpunktskegelschnitt und 1856 folgte der berühmte Vortrag über unsere Kurve, die auch Enveloppe der Asymptoten der gleichseitigen Hyperbeln obiger Art ist, wenn A, B, C, H die vier Punkte sind. Im Anschluss daran und im Hinblick auf die projektive Behandlung durch *Schröter,* unter Benutzung eines erst von *Faure* 1870 ausgesprochenen und dann von *Salmon* mit Hülfe der Invariantentheorie bewiesenen Satzes will *Fiedler* zeigen, dass die systematische Stellung der Hypocykloide in der projektiven Theorie der Kegelschnitte sich aus der Konstruktion leicht ableiten lässt. Die Methode der projektiven Konstruktion liefert einen einfachen Beweis des Satzes: Der Ortskreis der Scheitel der einem Kegelschnitt umschriebenen rechten Winkel wird von allen denjenigen Kreisen rechtwinklig geschnitten, welche Tripel harmonischer Pole des Kegelschnitts enthalten. Für die Kegelschnitte eines Büschels sind daher die sämtlichen Ortskreise senkrecht zu einem Kreise, welcher ihren gemeinsamen Tripeln harmonischer Pole, dem Diagonaldreieck des Vierecks der Grundpunkte, umschrieben ist. Der Beweis knüpft an die projektive Konstruktion der Kegelschnitte aus fünf Punkten an.

Als wertvolle Ergänzung zu der *Cremona*schen Arbeit kann die umfangreiche geometrische Studie von *Jntrigila*[1]) angesehen werden; vornehmlich gilt dies in Bezug auf die eine

---

[1]) Giorn. Batt. 23 (1885) p. 263—284.

ausführliche Behandlung erfahrenden Kegelschnitte, wobei auch neue Resultate erhalten werden Insbesondere werden auch die vollständigen orthogonalen Vierecke ABCH in Verbindung mit den Kegelschnitten eingehender berücksichtigt. „*Das einem Dreieck orthogonal konjugierte Dreieck in Bezug auf einen Kegelschnitt ist ein solches, bei dem die Polare seiner Scheitel in Bezug auf den Kegelschnitt senkrecht ist zu den gegenüber liegenden Seiten; und umgekehrt sagt man, dass der Kegelschnitt (der in diesem Falle immer eine gleichseitige Hyperbel ist) orthogonal konjugiert ist zu dem Dreieck.*“ Aus der Veränderung der Lage eines gewissen Kegelschnitts, der schliesslich mit dem Kreise C^2 zusammenfällt, wird die Berührung der Kurve mit g_∞ in den Kreispunkten bewiesen.

Eine Arbeit, welche zunächst durchaus nicht den Zweck hat, sich ausdrücklich mit der dreispitzigen Hypocykloide zu beschäftigen, ist die von *Meister*[1]: „*Über Systeme, welche durch Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Poldreieck gebildet werden.*“ Es ist daher interessant, dass sich zugleich einige Sätze über unsere Kurve ergeben. Im § 4 der genannten Arbeit werden die Arten der Kegelschnitte untersucht, die einem Netze bestimmter Art angehören. In demselben kommt, wie in jedem Netze, ein Kreis vor, da durch zwei Punkte, also auch durch die beiden unendlich fernen Kreispunkte ein Kegelschnitt des Systems bestimmt ist. Der Mittelpunkt des Kreises ist der Höhenschnitt des Polardreiecks, und je nachdem das letztere einen stumpfen Winkel oder nur spitze besitzt, ist der Kreis reell oder imaginär. Ferner enthält das System ein Büschel gleichseitiger Hyperbeln, da diese definiert sind als Kegelschnitte, welche die unendlich fernen Kreispunkte zu konjugierten Punkten haben. Die drei (rechtwinkligen) Geraden-Paare des Büschels ergeben sich leicht als die Halbierungslinien der Winkel des Polardreiecks und ihrer Nebenwinkel. Die Mittelpunkte aller gleichseitigen Hyperbeln aber liegen auf dem Kreise, der dem Polardreieck

---

[1]) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 31 (1886) p. 321– 344.

umschrieben ist. Sämtliche Parabeln Π^2 des Systems, welche die unendlich ferne Gerade berühren, bilden eine Schar, deren drei im Endlichen gelegenen Grundtangenten bei uns A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 sind. Ihre Brennpunkte liegen auf demjenigen Kreise C^2, welcher durch die Punkte A_1, B_1, C_1 und folglich auch durch die Höhenfusspunkte des Polardreiecks (ABC) geht, also auf dem *Feuerbach*schen Kreise des Polardreiecks. Die Scheiteltangente einer Parabel ist bekanntlich die Fusspunktkurve der vom Brennpunkte auf die Tangenten der Parabel gefällten Lote. Fällt man demnach von irgend einem Punkte S des *Feuerbach*schen Kreises des Polardreiecks auf die Seiten des Dreiecks $A_1B_1C_1$ die Lote, so liegen deren Fusspunkte auf einer Geraden, nämlich auf der Scheiteltangente derjenigen Parabel, welche S zum Brennpunkte hat. Wir sehen hieraus, dass die Scheiteltangenten aller Parabeln der Schar eine Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung C_3^4 umhüllen, eben die *Steiner*sche Hypocykloide; denn die unendlich ferne Gerade ist eine Doppeltangente und ergiebt sich nach obiger Konstruktion als Scheiteltangente derjenigen beiden Parabeln der Schar, welche einen der beiden unendlich fernen Kreispunkte zum Brennpunkte haben. Eine Parabel der Schar ist durch ihren unendlich fernen Brennpunkt oder ihren endlichen Brennpunkt bestimmt. Jedem Punkte des um $A_1B_1C_1$ beschriebenen Kreises als Brennpunkt einer Parabel ist daher ihr unendlich ferner Punkt zugeordnet und umgekehrt. Der Kreis und die unendlich ferne Gerade sind also eindeutig auf einander bezogen. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte, d. h. die Axen der Parabeln umhüllen eine Kurve dritter Klasse und vierter Ordnung C_3^4 und zwar ebenfalls eine *Steiner*sche Hypocykloide.

Eine Aufgabe allgemeinerer Art, die als speziellen Fall unsere Kurve enthält, hat *E. Borel*[1]) in den Nouvelles Annales gelöst: Man weiss, dass durch einen Punkt M in der Ebene eines Dreiecks ABC im allgemeinen zwei Kegelschnitte von gegebener Exzentrizität gehen, die dem Dreiecke umschrieben

[1]) Nouv. Ann. (3) 8 (1889) p. 495.

sind. Es soll der Ort des Punktes M gefunden werden, so dass die homologen Axen der beiden entsprechenden Kegelschnitte mit einander einen gegebenen Winkel bilden. Zur Lösung wird von einer quadratischen Transformation Gebrauch gemacht. Einem dem Dreiecke umschriebenen Kegelschnitt entspricht dann eine Kurve vierter Ordnung (vgl. auch *Reye, Geom. d. Lage* und *Salmon, Höh. eb. Kurven*), die die Ecken des „Beziehungsdreiecks" zu Doppelpunkten hat. Für den Fall des gleichseitigen Dreiecks erhält man die dreispitzige Hypocykloide.

Von *K. Dörholt*[1]) haben wir noch eine andere Arbeit hier zu erwähnen, in der er nur auf die Entstehung der Kurve aus den dem Dreieck $A_1B_1C_1$ eingeschriebenen Parabeln sich stützt. Dabei wird auch die Gleichung der Kurve in einer anderen Form aufgestellt. Ist φ der Winkel, den eine Tangente mit der Axe bildet, so wird $x = r\cos^2\varphi\,(1 - 2\sin^2\varphi)$ und $y = 8\,r\sin^3\varphi \cdot \cos\varphi$ (in anderem Zusammenhange werden wir auf diese Arbeit zurückkommen).

Auch *O. Rupp*[2]) geht von dieser Parabelschar aus: „*Es dürfte nun vielleicht nicht ohne Interesse sein, zu sehen, in welch überraschender elementarer Einfachheit die Sätze der Steinerschen Hypocykloide sich ergeben, wenn man den Zusammenhang, welcher zwischen der fraglichen Kurve und der Parabelschar besteht, als Ausgangspunkt benutzt.* Und in der Tat sind es nur wenige einfache Sätze über Tangenten und Brennpunkte von Parabeln, über Involutionen und ausserdem der *Brianchon*sche Satz, die als Voraussetzung dienen und mit denen alle Eigenschaften der *Steiner*schen Kurve bewiesen werden. Wir führen aus dieser Abhandlung noch den Satz an: „*Der Winkel zwischen zwei Fusspunktlinien ist gleich dem Peripheriewinkel über dem Bogen ihrer Brennpunkte oder dem Peripheriewinkel über dem Bogen ihrer Mittelpunkte.*" Diese Verallgemeinerung der bekannten Beziehung zwischen zwei auf einander senkrechten (konjugierten) Tangenten

---

[1]) Schulprogr. Gymn. Rheine 1891. [II]

[2]) Monatsh. f. Math. 4 (1893) p. 135—146. Wien.

liefert die Möglichkeit, die meisten Sätze *Steiners* einfach zu beweisen. *Rupp* hätte nur noch auf die Ableitung dieser Beziehung aus der Erzeugung durch Rollen, bzw. aus der unter IIIa. angeführten Erzeugung hinzuweisen brauchen, um sie noch deutlicher zu machen. Denn zeichnet man (Fig. 11) zwei Tangenten nach dem Verfahren der Erzeugung IIIa., indem man von einem festen Punkte U_1 des Kreises C^2 nach der einen Seite die Bogen $U_1 M_1$ und $U_1 M_2$, nach der anderen Seite die Bogen $U_1 S_1 = 2 U_1 M_1$ bzw. $U_1 S_2 = 2 U_1 M_2$ abträgt und die Geraden $S_1 M_1$ und $S_2 M_2$ zieht, die sich in S' schneiden, so ist das Dreieck $S_2 M_1 S'$ ein gleichschenkliges. Dies ist die obige Beziehung; und es lassen sich, wie wir schon früher hervorgehoben haben, aus ihr allerdings die meisten Eigenschaften beweisen.

In den Nouvelles Annales treffen wir wieder auf eine Aufgabe, die zwar zunächst etwas allgemeiner ist, aber durch ihre von *R. Sée*[1]) gegebene Lösung unmittelbar zu unserer Kurve führt. Es sind ein Dreieck $O\Omega_1\Omega_2$ (Fig. 12a u. b), dessen Seiten bzw. die Gleichungen $X = o$ $Y = o$ $Z = o$ haben, und ein Kegelschnitt Z^2 gegeben, der die Seiten $O\Omega_1$, $O\Omega_2$ in Ω_1 und Ω_2 berührt und dessen Gleichung $XY = Z^2$ ist. Auf diesem Kegelschnitte Z^2 nimmt man den durch die Gleichung $X = Y = Z$ definierten Punkt M und einen veränderlichen Punkt A_1; schliesslich bezeichnet man mit N' den Punkt, in dem die Gerade OM die Berührungssehne $\Omega_1 \Omega_2$ wiedertrifft, und mit P den Schnittpunkt von $A_1 M$ mit der Berührungssehne. Verbindet man nun den Punkt A_1 mit einem der Punkte N von $\Omega_1 \Omega_2$, die dieselbe Polare haben in Bezug auf die Winkel $\Omega_1 A_1 \Omega_2$ und $M A_1 N'$, so ist zu zeigen, dass, wenn A_1 den Kegelschnitt Z^2 beschreibt, die Gerade $A_1 N$ eine Kurve Z^4_3 vierter Ordnung und dritter Klasse einhüllt, deren Gleichung in Linienkoordinaten $u^3 + v^3 - uvw = o$ ist.

Wir wollen kurz den Inhalt der geometrischen Lösung wiedergeben. Die Punkte von $\Omega_1 \Omega_2$, welche dieselbe Polare in Bezug auf die beiden Winkel $\Omega_1 A_1 \Omega_2$, $M A_1 N_1$ haben, besitzen

[1]) Nouv. Ann. (3) 14 (1895) p. 272—280.

dieselbe harmonische Konjugierte in Bezug auf die Segmente $\Omega_1 \Omega_2$ und PN'; sie sind also die Punkte auf $\Omega_1 \Omega_2$, die den durch ihre Doppelpunkte Ω_1, Ω_2 und P, N' bestimmten Involutionen gemeinsam sind. Dann projiziert man die Figur (12a) so, dass die Gerade $\Omega_1 \Omega_2$ die unendlich ferne Gerade wird und die Punkte Ω_1, Ω_2 die cyklischen Punkte. Der Kegelschnitt Z^2 wird ein Kreis C^2 mit dem Mittelpunkt O als Projektion von O. Der Punkt M wird ein bestimmter Punkt M und das Involutionsbüschel $A_1 \Omega_1$, $A_1 \Omega_2$ geht in ein neues über. Da dieses letztere Büschel auf der unendlich fernen Geraden eine Involution erzeugt, deren Doppelpunkte die Kreispunkte bilden, so wird es durch einen rechten Winkel, der sich um A_1 dreht, erzeugt. Wie auch A_1 liege, sein Bildpunkt ist O. Das zweite Involutionsbüschel hat als Bildpunkt den Punkt J, folglich sind die Geraden, deren Enveloppe gesucht wird, die Geraden $A_1 A_1'$ und $A_1 A_1''$. Diese Enveloppe muss eine Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten sein; denn sie ist dritter Klasse, vierter Ordnung und hat die unendlich ferne Gerade als Doppeltangente in den Kreispunkten. Überdies muss sie als Mittelpunkt den Punkt O haben und als Basiskreis einen Kreis, dessen Radius gleich dem dreifachen Radius von C^2 ist, denn die beiden Geraden $A_1 A_1'$, $A_1 A_1''$ sind senkrecht, und man weiss, dass der Ort der Punkte, von denen aus man an die Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten zwei senkrechte Tangenten ziehen kann, der dieser Hypocykloide eingeschriebene Kreis ist. Dies wird noch direkt bewiesen, worauf wir nicht einzugehen brauchen. Die Aufgabe wird auch analytisch gelöst.

Eine neue Entstehung der Kurve ergibt sich bei der Untersuchung eines speziellen Büschels von Kurven dritter Ordnung nach *G. Stiner* [1]) in folgender Weise: Die vier Punkte H, A, B, C sollen ein festes Viereck bilden und D_1, D_2, D_3 seien die drei Umkreismittelpunkte der Dreiecke HBC, HCA, HAB. Dann bestimmen die drei Punkte D_i ($i = 1, 2, 3$) einen neuen Kreis K^2. Ist C' irgend ein Punkt von K^2 und schneidet der

---

[1]) Monatsh. für Math. 6 (1895) p. 372.

durch A, B, C gehende Kreis vom Mittelpunkt C′ die Geraden H (A, B, C) zum andern Male in S_i, so liegen die drei so erhaltenen Punkte S_i in einer Geraden s; durchläuft C′ den Kreis K^2, so umhüllt s eine dreispitzige Hypocykloide, welche die drei Geraden H (A, B, C) berührt. Der von *Stiner* angegebene Beweis ist zwar einfach, aber er wäre noch einfacher gewesen, wenn *Stiner* unmittelbar an *Steiner* angeknüpft hätte: In der *Steiner*schen Bezeichnung entspricht der Höhenschnittpunkt d dem Punkte H; a, b, c sind die hier A, B, C genannten Punkte und D_1, D_2, D_3 die von *Steiner* mit α, β, γ bezeichneten Mittelpunkte der Umkreise der Dreiecke dab, dac, dbc. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass nun die Beweisführung im Anschlusse an die *Steiner*schen Resultate einfach ist. Nur ist zu bemerken, dass für die durch die Gerade s eingehüllte Hypocykloide der eingeschriebene Kreis K^2 doppelt so gross ist als der Kreis C^2 bei *Steiner*, es sind also alle Längen zu verdoppeln. (Es möge noch erwähnt werden, dass die Möglichkeit der Erzeugung IIIa. auch hier nachgewiesen wird.)

W. Binder[1]) löst u. a. die Aufgabe: „*Diejenigen Kegelschnitte zu bestimmen, die einen gegebenen Kegelschnitt undulieren und durch drei nicht auf diesem liegende Punkte gehen.*“ Nach den Prinzipien der quadratischen Verwandtschaft entspricht einem dem Dreiecke umschriebenen Kegelschnitte eine Kurve vierter Ordnung; dementsprechend transformieren sich alle mit dem einem gleichseitigen Dreiecke umschriebenen Kreise konzentrischen Kreise in dreispitzige verlängerte und verkürzte Hypocykloiden. Der Übergangsfall ist die *Steiner*sche Kurve. g_∞ ist die isolierte Doppeltangente, die sie mit dem Grundkreise perspektivisch hat. (Vgl. *Borel* S. 57.)

Einen neuen Gesichtspunkt, von dem aus unsere Kurve behandelt worden ist, zeigt die Arbeit von *Bücking*[2]). Nach dem Dualitätsgesetze müssen den involutorischen Punkt-

---

[1]) Wien. Ber. 106 IIa (1897) p. 295—322.
[2]) Arch. d. Math. (2) 16 (1898) p. 271—319.

systemen der Ebene, in denen die Punkte sich paarweise entsprechen, Strahlensysteme gegenüber stehen, in welchen die Geraden involutorisch zugeordnet sind. Zu diesen gehört das System der „*Symmetriegeraden*"; zwei Symmetriegerade nennt *Bücking* solche, die die Seiten eines Dreiecks in gleich weit von den Seitenmitten entfernten Punkten schneiden. Wählt man als Linienkoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, die Abstände der Geraden von den Ecken des Grunddreiecks, so sind ξ_i $(i=1, 2, 3)$ und $\frac{1}{\xi_i}$ die Koordinaten zweier Seitensymmetriegeraden. Die Punkte P und P' sind Seitengegenpunkte im Dreieck $A_1 A_2 A_3$, wenn ihre Verbindungsgeraden mit jeder Ecke die Gegenseiten des Dreiecks in gleichweit von den Mittelpunkten der Seiten entfernten Punkten schneiden. Legt man als Punktkoordinaten die Abstände x_1, x_2, x_3 zu Grunde, so sind entsprechend x_i und $\frac{1}{x_i}$ die Koordinaten zweier Seitengegenpunkte. Durchläuft also der Punkt die Gerade a, die die Gleichung hat: $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = o$, so erhält man den Ort des Seitengegenpunktes, wenn man x_i mit $\frac{1}{x_i}$ vertauscht: $\frac{a_1}{x_1} + \frac{a_2}{a_2} + \frac{a_3}{x_3} = o$, diese Gleichung stellt aber einen durch die Ecken des Dreiecks gehenden Kegelschnitt vor. Im allgemeinen ist also die Verwandtschaft der beiden Systeme eine quadradisch-involutorische; einer Kurve C^n entspricht eine C^{2n}. Entsprechend sind die einleitenden Betrachtungen für die Seitensymmetriegeraden.

Eine Gerade g durchläuft, wenn ihre Seitensymmetriegerade sich um einen Punkt dreht, ein Strahlenbüschel zweiter Klasse, zu dem die Seiten des Dreiecks gehören, d. h. sie umhüllt einen Kegelschnitt K^2. Die Tangenten von einem Punkte an den zugehörigen Kegelschnitt sind die Seitensymmetriegeraden. Der zu einem Punkte P gehörende Kegelschnitt K^2 ist eine Ellipse oder Hyperbel, je nachdem P innerhalb der Fläche des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ und seiner Scheitelwinkel liegt oder ausserhalb derselben. K^2 ist eine

Parabel, wenn P ein Punkt der unendlich fernen Geraden ist. Die zueinander senkrechten Seitensymmetriegeraden sind, wenn M_1, M_2, M_3 die Seitenmitten des ursprünglichen Dreiecks sind, die Axen der dem Dreiecke $M_1 M_2 M_3$ eingeschriebenen Parabeln und zugleich Asymptoten gleichseitiger Hyperbeln. Die Axe einer beliebigen dem Dreiecke $M_1 M_2 M_3$ eingeschriebenen Parabel wird von ihrer Seitensymmetriegeraden unter rechten Winkeln geschnitten. U. s. w.

So sehen wir alle Beziehungen zwischen dem Dreiecke und den Kegelschnitten entstehen bis zu dem Satze, dass die Gesamtheit der zueinander normalen Seitensymmetriegeraden ein Strahlenbüschel dritter Klasse bildet von der Gleichung:
$\operatorname{ctg} A_1 \cdot \xi_1 (\xi_2 - \xi_3)^2 + \operatorname{ctg} A_2 \cdot \xi_2 (\xi_3 - \xi_1)^2 + \operatorname{ctg} A_3 \cdot \xi_3 (\xi_1 - \xi_2)^2 = 0$.
Durch jeden Punkt der Ebene gehen höchstens drei und wenigstens eine dieser Geraden; sie sind Strahlen einer Gegenschar, deren Leitkurve der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks ist, d. h. der Schnitt von je zwei aufeinander senkrechten Seitensymmetriegeraden liegt auf diesem Kreise, und damit sind wir wieder zu einer Haupteigenschaft unserer Kurve gelangt.

Eine Reihe der wichtigsten Eigenschaften der Kurve hat *C. Wirtz* [1]) in seiner Dissertation auf Grund von *Reyes* Geometrie der Lage von neuem entwickelt. Als Ausgangspunkt dient die Erzeugung der Kurve als Enveloppe der Axen der dem Dreiecke $A_1 B_1 C_1$ eingeschriebenen Parabeln.

In Bezug auf diese Arbeit gibt dann *F. P. Ruffini* [2]) einige Ergänzungen, indem er neue Eigenschaften der Kurve ableitet. Nimmt man auf einer beliebigen Geraden, welche die Kurve in den vier reellen oder imaginären Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, schneidet, irgend einen Punkt O an, so besteht die Beziehung $OA_1 \cdot OA_2 \cdot OA_3 \cdot OA_4 + H = 0$, wenn die Gleichung der Kurve $(x^2 + y^2)^2 + \varphi_3 (x, y) + H = 0$ lautet, wobei $\varphi_3 (x, y)$ ein ganzzahliges rationales Polynom dritten Grades in x und y und H eine Konstante ist.

---

[1]) Die Steinersche Hypocykloide. Diss. Strassburg 1900

[2]) Bologna Rendic. (2) 5 (1900/01) p. 13.

Von der Erzeugung durch die *Wallace*sche Gerade ausgehend, zeigt *M. Fréchet*[1]), dass es ein doppelt unendliches System die Hypocykloide dreifach berührender Kegelschnitte K^2 gibt, die dem Dreiecke ABC eingeschrieben sind (Fig. 4). Ist $\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}=1$ die Gleichung von K^2 und $x^2+y^2=d^2$ die des ABC umschriebenen Kreises D^2, so ergibt sich, dass $d^2=\alpha+\beta\pm 2\sqrt{\alpha\cdot\beta}$. Wenn der Kegelschnitt reell ist, ist d reell; folglich ist das Produkt $\alpha.\beta$ positiv und also K^2 eine Ellipse. Es seien a und b ihre Halbaxen, dann hat man, indem man $a \geqq b$ wählt, $d=a+\varepsilon b$, (wo $\varepsilon=\pm 1$). Ist nun H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC, O der Mittelpunkt des Neunpunktekreises, so ist O bekanntlich die Mitte von DH. Setzt man $OH=m$, so hat man, wenn man den Satz von *Faure* auf K^2 und den dem Dreiecke ABC konjugierten Kreis (mit dem Mittelpunkt O und dem Radius ρ) anwendet: $a^2+b^2=4m^2-\rho^2$. Nun geht der Neunpunktekreis durch den Höhenfusspunkt H_1 und die Mitte M_1 von CH. Der Radius ist also gleich $\frac{d}{2}=r$, also $HM_1\cdot HH_1=m^2-r^2$ und $\rho^2=CH\cdot HH_1=2m^2-r^2$. Daraus ergibt sich $ab=\varepsilon(r^2-m^2)$. Das Produkt der Halbaxen von K^2 ist also gleich dem absoluten Werte der Potenz seines Mittelpunktes D in Bezug auf den festen Kreis C^2. Wenn der Mittelpunkt von K^2 im Innern von C^2 liegt, ist die Summe der Halbaxen konstant und gleich dem Durchmesser von C^2; wenn D ausserhalb von C^2 liegt, tritt die Differenz anstelle der Summe. Wird $a=d$, $b=o$ d. h. liegt der Mittelpunkt von K^2 auf C^2, dann reduziert sich der Kegelschnitt auf ein Segment einer Geraden. Die Enveloppe einer Ellipse mit den Axen 2a und 2b, die unveränderlich mit einem konzentrischen Kreise vom Radius $a-\varepsilon b$ verknüpft ist und auf einem Kreise vom Radius $\frac{3}{2}(a-\varepsilon b)$ rollt, ist eine Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten.

---

[1]) Nouv. Ann. (4) 2 (1902) p. 206.

Wir kommen noch einmal auf die genannte Arbeit von *A. Gob*[1]) zurück, um aus ihr einige in diesen Abschnitt gehörige Punkte zu erwähnen. Die Axe der Abweichung d. i. die Verbindungslinie des Berührungspunktes einer Tangente an eine Kurve mit dem Mittelpunkte einer dieser Tangente parallelen, unendlich benachbarten Sehne der Kurve, (vgl. *Salmon-Fiedler,* höh. K., 2. Aufl. 1882, Seite 467/68, Nr. 386) in einem Punkte P der Hypocykloide ist der Ort der Mittelpunkte von Kegelschnitten, die in diesem Punkte mit der Kurve eine vierpunktige Berührung haben. Die Enveloppe dieser Axe der Abweichung wiederum ist der Ort für die Mittelpunkte der Kegelschnitte, die mit der Kurve eine fünfpunktige Berührung haben, und ergibt sich als eine Hypocykloide mit sechs Rückkehrpunkten. Die Axe der Parabel, die mit der Kurve eine vierpunktige Berührung hat, ist parallel zur Axe der Abweichung. Diese Parabel hat in P denselben Krümmungsmittelpunkt wie die Hypocykloide Bei jeder Parabel fällt nun die Projektion des Halbierungspunktes eines beliebigen Krümmungsradius auf den zugehörigen Radiusvektor mit dem Brennpunkte zusammen. Verbindet man diesen mit dem schon bewiesenen Satze: Diejenige Tangente durch einen Punkt P der Hypocykloide, deren Berührungspunkt nicht mit P zusammenfällt, ist gleich der Hälfte der Projektion des Krümmungsradius in P auf diese Tangente, so erhält man den schon von *Laquerre* angegebenen Satz: Der Brennpunkt der Parabel, die im Punkte P die Kurve überosculiert, liegt in Bezug auf P symmetrisch zu dem Berührungspunkte der durch P gezogenen zweiten Tangente. Schliesslich wollen wir noch den Satz anführen: Der Ort der Brennpunkte der Parabeln, die die Hypocykloide überosculieren, ist eine Epicykloide mit drei Rückkehrpunkten.

Von der anderen Arbeit von *Gob*[2]), die 1906 folgte, ist der grössere Teil den dreifach berührenden Ellipsen gewidmet, und es werden viele teils bekannte, teils neue Be-

[1]) Liège Mém. (3) 4 1902. [I]
[2]) Liège Mém. (3) 6 1906. [II]

ziehungen durch geometrische Betrachtungen bewiesen. Auch eine Verallgemeinerung des von *Schläfli* seinem Freunde *Steiner* mitgeteilten Satzes über den durch den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks A B C gehenden Kegelschnitt, der die drei Seiten des Dreiecks berührt, befindet sich darunter. Dieser Satz wird hier von der allgemeineren Annahme ausgehend bewiesen, dass H ein beliebiger, aber fester Punkt ist, durch den der die drei Seiten berührende Kegelschnitt geht. Legt man nämlich durch den Punkt, der H diametral gegenüberliegt, die Tangente, so schneidet diese die Seiten des Dreiecks in drei Punkten. Zieht man durch diese die Parallelen zu den Dreieckseiten, so schneiden sie sich in einem Punkte. Wird nun H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks, so wird die genannte Tangente Fusspunktlinie, und so kommt man auf den *Schläfli-Steiner*schen Satz zurück.

§ 6.

D. VI. Wir haben jetzt noch von einigen Arbeiten zu sprechen, die entweder noch andere Erzeugungsweisen, als die unter I bis V angeführten zur Grundlage haben (wie z. B. die *Humbert*sche Arbeit), oder Sätze über unsere Kurve ohne Beziehung zu irgend einer Entstehungsart enthalten.

So entwickelt *G. Humbert*[1]) einige Eigenschaften der Hypocykloide aus der „*Orientierung eines Systems von Geraden*", die von *Laguerre* in die Geometrie eingeführt worden ist. Dies ist eine gewisse Verallgemeinerung des Gedankens der „*isotropen Geraden*", auf die wir bereits oben bei Besprechung der *Laguerre*schen Arbeit hindeuteten.

Die allgemeine von *Laguerre* gegebene Definition lautet: „*Es seien* A *und* A′ *zwei Systeme von* n *Geraden in der Ebene und wir nehmen willkürlich eine feste Axe H an. Wenn dann die Summe der Winkel, die die Geraden des Systems* A *mit der festen Axe bilden, bis auf ein Vielfaches von* π *gleich ist der entsprechenden Summe für die Geraden des Systems* A′, *so*

---

1) { Nouv. Ann. (3) 12 (1893) p. 37 u. f.
Amer. J. of. Math. 10 (1888) p. 258 u. f.

sagt man, die Systeme A und A' haben dieselbe Orientierung." Dies führt *Humbert* analytisch aus. Zieht man durch den Ursprung zu den Geraden jedes Systems Parallelen

$$y - a_1 x = 0 \quad y - a_2 x = 0 \ldots\ldots y - a_n x = 0$$
$$y - a'_1 x = 0 \quad y - a'_2 x = 0 \ldots\ldots y - a'_n x = 0$$

und sind $\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n \\ \alpha'_1, \alpha'_2 \ldots\ldots \alpha'_n \end{matrix}$ ihre Winkel mit der x=Axe, so ist

$$\alpha_k = \operatorname{arctg} a_k \quad \text{oder} \quad e^{2 i \alpha_k} = \cos(2 \operatorname{arctg} a_k) + i \sin(2 \operatorname{arctg} a_k)$$

$$= \frac{1 - a^2_k}{1 + a^2_k} + i \frac{2 a_k}{1 + a^2_k} = \frac{(1 + i a^k)^2}{1 + a^2_k} = \frac{i - a_k}{i + a_k} \text{ und folglich}$$

$$e^{2 i (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n)} = \frac{(i - a_1)(i - a_2)(i - a_3) \ldots\ldots (i - a_n)}{(i + a_1)(i + a_2)(i + a_3) \ldots\ldots (i + a_n)}.$$

Setzt man jetzt

$$\left.\begin{matrix} (y - a_1 x) \cdot (y - a_2 x) \ldots\ldots (y - a_n x) = f(x, y) \\ (y - a'_1 x) \cdot (y - a'_2 x) \ldots\ldots (y - a'_n x) = \varphi(x, y) \end{matrix}\right. \text{, so wird}$$

$$e^{2 i (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n)} = \frac{f(1, i)}{f(-1, i)} \text{ und } e^{2 i (\alpha'_1 + \alpha'_2 + \ldots \alpha'_n)} = \frac{\varphi(1, i)}{\varphi(-1, i)}.$$

Wenn nun die beiden Systeme A und A' dieselbe Orientierung haben, d. h. wenn $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \ldots \alpha'_n + h\pi$, so ist $\frac{f(1, i)}{f(-1, i)} = \frac{\varphi(1, i)}{\varphi(-1, i)}$. Gehen die Geraden durch den Ursprung und ist $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung ihrer Gesamtheit, so wird die Orientierung definiert durch $\frac{f(1, i, 0)}{f(-1, i, 0)}$; allgemeiner, ist $f(x, y, z) = 0$ die Gleichung irgend einer algebraischen Kurve, so wird durch die Beziehung $\frac{f(1, i, 0)}{f(-1, i, 0)}$ die Orientierung des Systems der Asymptotenrichtungen dieser Kurve definiert.

Nach dieser Einführung werden in der Ebene veränderliche Systeme betrachtet, und es ergibt sich der Satz: Damit ein veränderliches System von n Geraden, deren Gleichung rationale Parameter enthält, in der Ebene eine feste Orientierung hat, ist notwendig und hinreichend, dass, wenn eine oder mehrere Gerade des Systems durch einen der Kreis-

punkte gehen, andere Gerade in gleicher Anzahl durch den anderen Kreispunkt gehen.

Schliesslich werden dann die gewonnenen Resultate auf die Cykloiden, insbesondere auf die Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten angewendet. Wenn eine Kurve alle ihre Brennpunkte im Unendlichen hat, d. h., wenn die Tangenten, die man an sie durch die cyklischen Punkte legen kann, mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, so wird die Reziproke dieser Geraden in Bezug auf einen festen Kreis mit dem Mittelpunkt O eine solche, dass die isotropen Geraden, die von O ausgehen, sie nur in O schneiden. Die Reziproke einer Epi- oder Hypocykloide in Bezug auf den festen Kreis hat in Polarkoordinaten die Gleichung $\frac{1}{r} = k \cdot \cos \frac{1}{2n-1} \cdot \theta$, wenn $n = \frac{\text{Radius d. bewegl. Kreises}}{\text{Radius d. festen Kreises}}$ ist. Die Gerade entspricht dem Falle $-\frac{1}{2}$, unsere Kurve dem Falle $-\frac{1}{3}$. Die algebraischen Hypocykloiden, die man erhält, wenn man einen Kreis im Innern eines grösseren Kreises rollen lässt, haben alle ihre Brennpunkte im Unendlichen, folglich ist die Orientierung des Systems der Tangenten, die von einem Punkte der Ebene an eine dieser Kurven gezogen werden können, unabhängig von der Lage des Systems. Als speziellen Fall erhält man z. B. den folgenden Satz, der aus der Theorie unserer Kurve von früher bekannt ist:

„*Die Orientierung des Systems der drei von irgend einem Punkte an die dreispitzige Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten gezogenen Tangenten ist dieselbe, wie die der drei Symmetrieaxen der Kurve.*“

Die zahlreichen bekannten Beziehungen zwischen den Seiten und Höhen eines Dreiecks, den daraus gebildeten vollständigen Vierecken, dem *Feuerbach*schen Kreise und der *Steiner*schen Hypocykloide sind Gegenstand eines Vortrages von *W. Godt*[1]). „*Der Vortragende deutet zum Schluss an, dass*

---

[1]) Jahresbr. d. Deutsche Math. Ver. 4 (1896) p. 161—162.

er seine Betrachtungen als Anwendung einer allgemeinen Methode auf einen metrisch ausgezeichneten besonderen Fall der kubischen binären Form ansieht, von deren Leistungsfähigkeit er hiermit einen Beweis vorzulegen wünsche."

Einen äusserst einfachen Beweis des von *Cremona* zuerst bewiesenen Satzes, dass jede Kurve dritter Klasse und vierten Grades, die die unendlich ferne Gerade in den beiden Kreispunkten berührt, eine Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten ist, liefert gelegentlich *E. Duporcq*[1]).

Der Beweis beruht auf der Transformation zweiten Grades, die die Brennpunkte der einem festen Dreiecke eingeschriebenen Kegelschnitte verbindet, (Inversion in Bezug auf das Dreieck). Der unendlich fernen Geraden entspricht der dem Dreiecke umschriebene Kreis, die Kreispunkte transformieren sich aufeinander; ist das Dreieck gleichseitig, so hat unsere Kurve C_3^4, da die Doppelpunkte Rückkehrpunkte sind, als Transformierte den dem Dreiecke eingeschriebenen Kreis.

Aus einer Arbeit von *d'Ocagne*[2]): „*Sur un système spécial de coordonnées tangentielles et sur la transformation par tangentes orthogonales*" führen wir nur den Satz an:

„*Die durch orthogonale Tangenten einer Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten in Bezug auf eine ihrer Tangenten* t *Transformierte ist eine andere Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten, die die Gerade* t *gleichfalls berührt und ausserdem in demselben Punkte schneidet, wie die erste.*"

§ 7.

Wir kommen nun noch zu einer Betrachtung, die **VII.**
ebenfalls durch die *Steiner*sche Abhandlung angeregt ist. In dieser Abhandlung findet sich noch eine Konstruktion angegeben, die zu den der Kurve eingeschriebenen Polygonen führt. (Vergl. Anhang Seite 88.)

Die betreffenden Sätze wurden von *L. Cremona* in der früher genannten Arbeit[3]) ergänzt. Wenn ein Punkt S_1 auf

---

1) Nouv. Ann. (4) 1 (1901) p. 168—171.
2) Nouv. Ann. (4) 1 (1901) p. 433—450.
3) Crelle 64 (1864) bes. pag. 120, 121 u. f.

dem Umfange des der Hypocykloide eingeschriebenen Kreises C^2 gegeben ist und man willkürlich eine Sehne $S_1 S_2$ zieht, dann eine andere Sehne $S_2 S_3$ senkrecht zu dem Durchmesser, der durch S_1 geht, danach eine dritte Sehne $S_3 S_4$ senkrecht zu dem Durchmesser, der durch S_2 geht und so fort, so bilden diese Sehnen eine gebrochene Linie, die dem Kreise ein- und der Hypocykloide umbeschrieben ist. Die zwischen zwei auf einander folgenden Sehnen bestehende Relation ist die, dass Bogen $\widehat{S_x S_{x+1}}$ doppelt so gross ist wie Bogen $\widehat{S_{x-1} S_x}$, aber entgegengesetzt gerichtet, d. h. wenn man zwei Bogen, deren Differenz ein Vielfaches des Umfanges 2π ist, als gleich betrachtet, so hat man $\widehat{S_x S_{x+1}} + 2\widehat{S_{x-1} S_x} = 0$ oder auch, indem man den Bogen $\widehat{S_1 S_x}$ mit θ_x bezeichnet: $\theta_{x+1} + \theta_x - 2\theta_{x-1} = 0$, woraus folgt $\theta_{x+1} + 2\theta_x = \theta_2$ und folglich

$$(1) \qquad \theta_x = \frac{1 - (-2)^{x-1}}{3}\,\theta_2.$$

Nimmt man jetzt an, dass man nach einer Reihe verschiedener Ecken $S_1, S_2, \ldots S_{n-1}$ zu einer Ecke S_n kommt, die mit einer der vorhergehenden Ecken S_m zusammenfällt, so ist die Bedingung für das Zusammenfallen der Punkte S_n, S_m offenbar die, dass die Differenz $\theta_n - \theta_m$ ein Vielfaches von 2π sei, folglich muss nach der Gleichung (1) $\frac{\theta_2}{2\pi}$ eine rationale Zahl $\frac{q}{p}$ sein, wo q und p zwei positive ganze Zahlen bedeuten, die zu einander teilerfremd sind. Die Gleichung (1) liefert dann $(2)\ \frac{\theta_n - \theta_m}{2\pi} = \frac{(-2)^{m-1} - (-2)^{n-1}}{3} \cdot \frac{q}{p}$; wenn also die Punkte S_n, S_m zusammenfallen sollen, so muss die Kongruenz erfüllt sein: $(3)\ q \cdot (-2)^{m-1} \left\{(-2)^{n-m} - 1\right\} \equiv 0 \pmod{3p}$. Ist nun $p = 2^\alpha \cdot p'$, wo p' eine ungerade Zahl ist, so ist der kleinste Wert von m, der der Kongruenz (3) genügt, offenbar $m = \alpha + 1$, woraus folgt, dass, wenn p den Faktor 2^α enthält, der Punkt $S_{\alpha+1}$ die erste Ecke des geschlossenen Polygons sein wird, d. h. die Ecke, in welcher es sich schliesst; anders ausgedrückt: die gebrochene Linie $S_1, S_2 \ldots S_n$ setzt

sich zusammen aus einem offenen Teil $S_1 S_2 \ldots . S_{\alpha+1}$, der α Seiten hat, und einem geschlossenen Polygon $S_{\alpha+1} \ldots . S_n$. Hat man also nur $p = 2^\alpha$, so gibt es kein geschlossenes Polygon; die gebrochene Linie $S_1 S_2 \ldots .$ hört im Punkte $S_{\alpha+1}$ auf. Dagegen gibt es jedesmal ein Polygon $\mathfrak{P}$, wenn p eine ungerade Zahl ist.

Damit sind die *Cremona*schen Betrachtungen noch nicht erschöpft, indessen wollen wir uns hier mit dem Gesagten begnügen.

Eine andere Klasse von Polygonen hat *Clebsch*[1]) in der schon genannten Mitteilung angegeben. Diese entstehen auf folgende Weise: Man sucht zu einer Tangente a_1 die konjugierte b_1, zieht durch die Berührungspunkte beider die Tangente a_2, sucht zu ihr wieder die konjugierte b_2, zieht durch die Berührungspunkte die Tangente a_3, u s. w. Wenn dieser Prozess auf eine Tangente a_{n+1} führt, welche mit a_1 zusammenfällt, so hat man ein geschlossenes n-Eck $a_1, a_2 \ldots . a_n$, bei welchem jede Seite die Kurve in einer der beiden auf ihr liegenden Ecken berührt. Die Parameter der Seiten werden, wenn $\frac{\lambda}{\mu}$ der Parameter von b_1 ist, $-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1, -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-2}, -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4, \ldots -\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(-2)^n}$. Das Polygon schliesst sich also, wenn $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(-2)^n - 1} = 1$ ist, oder wenn (bei der Hypocykloide) der zugehörige Wert von ϑ (vgl. Seite 8) gleich $\frac{2k\pi}{(-2)^n - 1}$ ist. Aber nur dann erhält man ein wirkliches n-Eck, wenn nicht schon $\frac{(-2)^m - 1}{(-2)^n - 1} \cdot k$ für $m < n$ eine ganze Zahl werden kann. Das tritt immer und nur dann ein, wenn k von der Form $g \cdot \frac{(-2)^n - 1}{(-2)^\mu - 1}$ (g ist eine ganze Zahl) und μ ein Faktor von m ist, 1 nicht ausgeschlossen.

---

[1]) Crelle 64 (1864) p. 124 u. 125.

Ziemlich ausführlich hat *S. Kantor*[1]) die aus drei, vier und mehr Tangenten der Hypocykloide entstehenden Vielseite untersucht, und zwar geometrisch, indem er von der *Steiner*schen Erzeugung der Kurve ausgeht. Alle Fusspunktlinien des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises in Bezug auf seine Seiten sind ja Tangenten, deren Kombinierung zu interessanten Sätzen über Vielseite führt. Zunächst werden auch die bekannten Resultate abgeleitet, z. B.: Der Scheitel zweier sich senkrecht schneidenden Tangenten liegt auf dem *Feuerbach*schen Kreise des Dreiecks. Die Sehne, welche die Berührungspunkte zweier senkrechten Tangenten verbindet, ist wieder eine Tangente von C^4_3. Die auf einer veränderlichen Tangente g durch ein bestimmtes Paar senkrechter Tangenten ausgeschnittene Strecke hat ihren Halbierungspunkt auf dem Kreise C^2. Dann aber sind über das Vierseit die neuen Sätze zu erwähnen: Jedem Vierseit lassen sich unendlich viele Kegelschnitte einbeschreiben; da die Kurve dritter Klasse ist, so hat sie mit jedem Kegelschnitt sechs Tangenten gemeinsam, also ausser den vier Seiten des Vierseits weitere zwei. Diese Paare bilden eine quadratische Involution, und daher bilden auch die verschiedenen Punkte F auf dem dem Dreieck ABC umschriebenen Kreise D^2, eine solche Involution. Die Verbindungslinien entsprechender Punktepaare müssen folglich durch denselben Punkt gehen, und da die g_∞ (vermöge ihrer Kreispunkte) auch zu diesen Verbindungslinien gehören muss, so liegt das Involutionszentrum in unendlicher Entfernung, „*Die Gerade der Diagonalmitten des Vierseits ist parallel zu der Gegentangente und liegt in der Mitte zwischen dieser und der Axe der dem Vierseit eingeschriebenen Parabeln.*“ (Hieraus folgt ein entsprechender Satz für Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt nach dem Dualitätsgesetze, vgl. *Cremona,* Introduzione.) — Gehören zu fünf Punkten auf dem umschriebenen Kreise fünf Fusspunktlinien, so gelten ähnliche Sätze. Solche Fünfseite liegen so, dass entprechende Gerade sich in Punkten einer und derselben Geraden schneiden, nämlich der sechsten,

---

[1]) { Wien. Ber. 78_2 (1878) p. 204—233. [II]
Compt. Rend. 127 (1899) p. 928.

dem eingeschriebenen Kegelschnitt und der Hypocykloide gemeinsamen Tangente. Die Punkte S_μ, die Mittelpunkte der Umkreise der fünf Vierseite eines Fünfseites bilden ein Kreisfünfeck. Der Mittelpunkt des einem Tangentenfünfseite unserer Kurve eingeschriebenen Kegelschnittes liegt auf dem Kreise durch die Punkte S_μ des Fünfseits.

Auch eine Reihe von Beziehungen zwischen Kegelschnitten und den Vielseiten der Kurve werden abgeleitet, die aber schon zum Teil bekannt sind, z. B. dass die Mittelpunkte sämtlicher die *Steiner*sche Hypocykloide fünfpunktig berührenden Kegelschnitte (Ellipsen) eine Hypocykloide mit sechs Rückkehrpunkten erfüllen, von denen drei mit den Rückkehrpunkten der dreispitzigen zusammenfallen. Wir fügen noch den dem obigen Satze entsprechenden für Sechsseite hinzu: „*Bei jedem einer Steinerschen Hypocykloide umschriebenen Sechsseite liegen die Mittelpunkte der durch die Fünfseite bestimmten Kegelschnitte auf einem Kreise, dessen Zentrum der Schnittpunkt der sechs Kreise* S_μ *ist, und bilden ein Sechseck, dessen Winkel gleich denen des Sechsseits sind.*“

Die Untersuchungen *K. Dörholts* [1]) in der schon genannten Arbeit beschäftigen sich mehr mit Vielecken im Sinne zahlentheoretischer Betrachtungen im Anschlusse an die Sehnenvielecke *Steiner*s und *Cremona*s.

Dagegen sind die Arbeiten von *P. Serret* [2]) wieder mehr eine Ergänzung der *Kantor*schen. Es handelt sich um eine Reihe von Sätzen, die sich auf das *Michel-Clifford*sche Theorem beziehen, und ferner um die Eigenschaften, die sich für der Hypocykloide vom Modul $\frac{1}{3}$ umschriebene Polygone mit 5, 6, 7, 11, 12 Seiten ergeben. Die Grundlage der Fragestellung bildet das folgende Problem: „*Es ist die Bedingung zu finden, die das Fünfseit* ($T_1\ T_2 \ldots T_5$) *erfüllen muss, damit der Michelsche Kreis, der ihm entspricht, in eine Gerade aus-*

---

[1]) Über einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte. Diss. Münster 1884.

[2]) Compt. Rend. 123 (1896) p. 396—415. 442—461.
125 (1897) p. 404. 423. 445.

artet," oder auch, da der Kreis nichts anderes ist als der Ort der Gleichseite, die dem Fünfseit konjugiert sind: *„Es ist zu finden, unter welcher Bedingung dieser Ort sich auf eine Gerade reduziert."* Es ergibt sich, dass man das betrachtete Polygon der Hypocykloide vom Modul $\frac{1}{3}$ umschreiben kann. — Nebenbei sei erwähnt, dass *Kantor* Prioritätsansprüche gegen *Serret* in den Comptes Rendues, Bd. 127, Seite 928, geltend gemacht hat.

§ 8.

VIII. Die Untersuchungen unserer Kurve erstrecken sich weiterhin auch auf ihren Zusammenhang mit räumlichen Gebilden.

So finden wir bei *Cremona*[1]) folgende Betrachtung: Man weiss, dass jede Ebene eine Gerade enthält, die eine gegebene abwickelbare Oberfläche vierten Grades in zwei verschiedenen Punkten berührt. Wenn man also die Oberfläche durch eine Ebene schneidet, die durch die unendlich ferne Doppeltangente geht, so wird der Schnitt eine Kurve dritter Klasse und vierten Grades sein, die die unendlich ferne Gerade zur Doppeltangente hat. Folglich schneidet, wenn die abwickelbare Fläche den imaginären unendlich fernen Kreis in zwei (imaginär konjugierten) Punkten berührt, jede Ebene, deren unendlich ferne Spur die Berührungssehne ist, die Oberfläche längs einer Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten.

J. E. F. Eckardt[2]) verallgemeinert seine Erzeugungsweise, indem er in zwei parallelen Ebenen zwei gleich grosse Kreise I und II so übereinander legt, dass ihre Mittelpunkte senkrecht übereinander liegen. Bewegen sich nun auf diesen Kreisen zwei Punkte gleichförmig mit verschiedenen Geschwindigkeiten (für unseren Fall 2 : 1) in entgegengesetzten Richtungen, und verbindet man die entsprechenden gleichzeitigen Lagen,

---

[1]) Crelle 64 (1864) p. 119 u. f.

[2]) Ztschr. f. Math. u. Phys. 15 (1870) pag. 133.

so entsteht eine Regelfläche Diese liefert in unserem Falle, wenn man sie durch eine zu den Grundkreisen parallele Ebene in $\frac{2}{3}$ des senkrechten Abstandes der Ebenen beider Kreise schneidet, die Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten.

Eine andere Erzeugung durch räumliche Gebilde gibt *Laguerre*[1]) an. Im Raume ist eine Ellipse E^2 gegeben, die sich auf eine gegebene Ebene [P] als Kreis C^2 projiciert. Auf E^2 ist ein fester Punkt $\mathfrak{A}$ und ein beweglicher $\mathfrak{M}$ gegeben. Durch die Mitte $\mathfrak{J}$ der Sehne $\mathfrak{AM}$ wird eine zur Sehne senkrechte Ebene gelegt, die [P] längs einer Geraden schneidet. Die Enveloppe dieser Geraden ist die Kurve C^4_3, die man auch auffassen kann als Ort der Mittelpunkte der in Bezug auf die Ebene [P] symmetrischen und die Ellipse E^2 berührenden Kugeln. Auch aus dieser Erzeugung werden die Haupteigenschaften der Hypocykloide nachgewiesen und wird ihre Ordnung und Klasse bestimmt; ferner wird gezeigt, dass es nicht zwei parallele Tangenten an die Kurve geben kann, und dass die unendlich ferne Gerade Doppeltangente ist, deren Berührungspunkte auf den Asymptoten des Kreises liegen.

G. Stiner[2]) fasst die Hypocykloide auf als scheinbaren Umriss von Regelflächen dritten Grades bei zentraler Projektion. Jede Ebene durch eine Erzeugende einer solchen Regelfläche enthält ausserdem noch einen auf der Fläche liegenden Kegelschnitt. Die Projektion desselben berührt die Hypocykloide dreimal. Umgekehrt kann jeder die Kurve dreimal berührende Kegelschnitt nach dieser Methode dargestellt werden. Von den zahlreichen Eigenschaften, die auf diesem Wege für die dreimal berührenden Kegelschnitte gefunden werden, sei hier nur erwähnt: es kann ein solcher Kegelschnitt, sich selbst kongruent bleibend, so bewegt werden, dass er die Hypocykloide dauernd dreimal berührt; hierbei beschreibt sein Mittelpunkt einen Kreis. (Diese in

1) Bull. d. l. Soc. Math. de France 7 (1879) p. 108—124. [II]
2) Schulpr. St. Gallische Kantonschule 1898. [II]

böhmischer Sprache geschriebene Arbeit ist mir nicht zugänglich gewesen; vorstehende Angaben entstammen dem betreffenden Referate in dem Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik. Bd. 30 (1899) S. 484.)

Schliesslich wollen wir noch einer merkwürdigen Erzeugung unserer Kurve Erwähnung tun: In *Sohncke*s Sammlung von Aufgaben aus der Differential- und Intregalrechnung, 2. Teil (1906) p. 195 findet sich die folgende Aufgabe mit Lösung. Ein Rotationskörper mit gegebener Basis und gegebenen Volumen V soll so geformt werden, dass er ein Minimum von Widerstand erfährt, wenn er sich mit konstanter Geschwindigkeit durch ein widerstehendes Mittel in der Richtung seiner Axe bewegt. Wie lautet die Gleichung des Meridians dieses Rotationskörpers? Die gesuchte Kurve ist eine Hypocykloide, für welche der Radius des festen Kreises dreimal so gross ist als derjenige des erzeugenden.

3. Kapitel.

Anwendungen der Hypocykloide.

E, IX. Nach *A. von Braunmühl*, Studie über Kurvenerzeugung[1]) ist der erste Apparat zur Zeichnung cyklischer Kurven von *Albrecht Dürer*[2]) erfunden worden. Sodann wurden mehrere Apparate zur instrumentalen Erzeugung dieser Kurven von dem Venetianer Conte *Gianbattista Suardi*[1]) angegeben. „*Um ein festes Zentrum dreht sich ein Arm von konstanter Länge, um dessen Endpunkt ein den Stift führender zweiter Arm mit konstanter, übrigens beliebig regulierbarer Geschwindigkeit rotiert. Es ist dies also genau die Entstehung der Epicykeln, wie sie sich Hipparch und Ptolemaeus*

[1]) Katalog mathematischer und mathem.-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, im Auftrage der Deutchen Mathematiker-Vereinigung herausgegeben von *W. Dyck,* München 1892, p. 54—88.

[2]) Vgl. auch *S. Günther:* Albrecht Dürer, einer der Begründer der modernen Kurvenlehre. Bibl. math. *v. Enneström*, 1886 p. 139.

gedacht hatten. Die Abhängigkeit der beiden Bewegungen wird entweder durch eine Schnur oder besser durch Zahnräder reguliert.“

Eine weitere Reihe von Apparaten, deren Konstruktion auf der Erzeugung der cyklischen Kurven durch Bewegung zweier Kreise beruht, verdankt ihre Entstehung wohl hauptsächlich technischen Bedürfnissen. So gibt *von Cardinal*[1]) im Jahre 1830, als er von der Notwendigkeit der Verwendung der Hypocykloide an Zahnrädern spricht, einen im Principe und in der Ausführung einfachen Apparat an, dem die Erzeugung I (Seite 3) zu Grunde liegt.

Ähnliche Apparate sind von *J. C. Ellis*[2]), *Plettner*[3]), *Wilson*[4]), *Thallmayer*[5]) angegeben worden.

Ausserdem sei auf den Seite 76 Anm. 1 genannten Katalog math. Modelle etc. von *Dyck* bes. S. 335 u. f. verwiesen.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir eine in der Zeichenpraxis der Zahnräder sehr alte und viel benutzte näherungsweise Konstruktion mit Hülfe des Zirkels angeben, die sich für unsere Kurve folgendermassen gestaltet: Man teilt einen Sektorbogen von 60^0 des festen Kreises in n gleiche Teile und den Halbkreisbogen des rollenden Kreises ebenfalls in n gleiche Teile. Schlägt man dann der Reihe nach mit den Sehnen vom Anfangspunkte der Einteilung auf dem rollenden Kreise nach den Teilpunkten um die entsprechenden Teilpunkte auf dem festen Kreise kleine in einander laufende Kreisbögen, so erhält man eine hinreichend genaue Annäherung unserer Kurve (s. Fig. 1; vgl. auch die im zweiten Teil angegebene Konstruktion von *Schlömilch* (Seite 11), die auf derselben Grundlage ruht, aber sich dadurch unterscheidet, dass sie bestimmte Punkte genau konstruiert).

---

[1]) Polytechn. J. 35 (1830) p. 329—332.

[2]) Proc. Cambr. Phil. Soc. 2 (1864—76) p. 256—260.

[3]) Repert. f. Exp. Phys. München 11 (1875) p. 24—28.

[4]) Proc. R. Soc. Edinb. 9 (1876) p. 161—170.

[5]) Polyt. J. 228 (1878) p. 312—314.

Von der grossen Zahl derjenigen Autoren, welche über die Anwendung der Cykloiden in der Verzahnungstheorie geschrieben haben, seien erwähnt *Reuleaux, Bach, Ritterhaus* und besonders *L. Burmester*[1]), welcher, wie schon oben angedeutet wurde, eine neue Theorie der Cykloiden mit Rücksicht auf die Verwertung dieser Kurven an Zahnrädern (Stirnräder) gegeben hat. Die Epi- und Hypocykloiden treten auf als Begrenzungslinien der Zahnflanken, wenn die „Eingriffslinien", das sind die Kurven der Berührungspunkte, Kreise sind. Die Hüllbahn-Kurven, die hier eine grosse Rolle spielen, sind für unsere Kurve Epicykloiden. Die Hüllbahnkurve wird von der Hypocykloide beschrieben, wenn man sie mit dem festen Kreise, in dem sie sich befindet, auf einem anderen Kreise rollen lässt entsprechend der Bewegung zweier Zahnräder gegen einander.

Ausführlicher und spezieller finden wir diese Beziehungen in den neuen *Schilling*schen Modellen[2]) dargestellt, die wir schon erwähnt haben. Das Modell 6 der Serie 31 zeigt die Enveloppen der dreispitzigen Hypocykloide, die aus zwei verschiedenen vierspitzigen und zwei zweispitzigen Epicykloiden bestehen.

Anmerkungsweise wollen wir erwähnen, dass nach *O. Blumenthal*[3]) neben anderen Kurven die dreispitzige Hypocykloide auftritt als Bahn des elektrisch geladenen Jons eines glühenden Dampfes.

4. Kapitel. Schluss.

Einige aus der Hypocykloide abgeleitete Kurven.

F. X. Schon *Weissenborn*[4]) gibt in dem im Anfange genannten Buche eine Fusspunktkurve der Hypocykloide an, die ent-

---

[1]) Lehrbuch der Kinematik. 1887.

[2]) Ztschr. f. Math. u. Phys. 44 (1899) p. 214 — 217 u. 51 (1904) p. 1 — 49.

[3]) Ztschr. f. Math. u. Phys. 45 (1900) p. 119—136.

[4]) Die cykl. Curven, Eisenach 1856.

steht, wenn man vom Mittelpunkte O des ruhenden Kreises Lote auf die Tangenten unserer Kurve fällt; diese Fusspunktkurve ist eine verlängerte Hypocykloide. Von ihr hat *Böklen* den in Kapitel 2 (Seite 12) angeführten Satz bewiesen. *Kiepert*[1]) erhält durch eine einfache Betrachtung aus der *Steiner*schen Kurve die eben angeführte Fusspunktkurve und eine weitere Kurve, die er als „Polarkurve" bezeichnet. Erinnern wir uns der Erzeugung III. a. Bei ihr beschreibt der Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Sehne SM die Fusspunktkurve, weil die Verbindungslinie von $\mathfrak{M}$ mit dem Mittelpunkte O des Kreises C^2 auf SM senkrecht steht. Legt man in S und M an den Kreis C^2 die Tangenten, so schneiden diese sich im Pole $\mathfrak{P}$ der Sehne SM. Der Punkt $\mathfrak{P}$ beschreibt während der Bewegung der Sehne die Polarkurve. Es folgt unmittelbar, da $O\mathfrak{M} : r = r : O\mathfrak{P}$, dass die Polarkurve durch reziproke Radien aus der Fusspunktkurve abgeleitet werden kann. Die Tangente an die Polare im Punkte $\mathfrak{P}$ teilt SM im Punkte $\mathfrak{M}'$ so, dass $S\mathfrak{M}' = 2\,\mathfrak{M}'M$ (allgemein in demselben Verhältnis $1 : n$, in dem P die Sehne SM teilt). Da hier $n = -2$ ist, so folgt das genannte Verhältnis. Die ursprüngliche Kurve, der ihr eingeschriebene Kreis, die Fusspunktkurve und die Polare berühren sich sämtlich in denselben drei Punkten. Die Gleichung der Fusspunktkurve ist $\rho = r \cdot \cos \frac{3}{2}\vartheta$ und die der Polarkurve $\rho = \dfrac{r}{\cos \frac{3}{2}\vartheta}$, wo ρ der Radiusvektor und ϑ der Winkel ist, den ρ mit der festen $x =$ Axe bildet. Wegen der einfachen Beziehungen, die die Kurven zu einander haben, lassen sich noch leicht weitere schöne Sätze ableiten.

Als Lösung der Aufgabe: Zu drei gegebenen Punkten ist der Ort eines vierten Punktes zu finden, so dass die Axen der beiden Parabeln, die durch diese vier Punkte hindurchgehen, einen gegebenen Winkel mit einander bilden, ergibt

---

[1]) Ztschr. f. Math. u. Phys. 17 (1872) p. 129—147.

sich nach *P. Mansion*[1]) das Dreiblatt, eine später von *Brocard* ausführlich untersuchte Fusspunktkurve der Hypocykloide.

Auf demselben Wege wie *Kiepert* gelangt *G. de Longchamps*[2]) zu der Polarkurve. *Longchamps* bemerkt aber vor allem ihren Charakter als Trisektrix, der aus der Gleichung hervorgeht. Um einen Winkel POQ zu drittteilen, konstruiert man (Fig. 13) den Bogen AA′ der Kurve, zieht die Tangente PQ an den Kreis C^2 und schlägt um O als Mittelpunkt mit OQ den Kreis, der den Bogen AA′ in S schneidet. Die Gerade SO, bis $\mathfrak{z}$ verlängert, gibt einen Winkel $\mathfrak{z}OQ = \frac{1}{3} POQ$. Denn da $OQ = \frac{r}{\cos POQ}$ und, nach der Gleichung der Kurve, $OS = \frac{r}{\cos 3\,\mathfrak{z}OQ}$, so folgt $POQ = 3\,\mathfrak{z}OQ$. Ferner werden die Quadratur und Rektifikation der Kurve gegeben. Auch das schiefe Dreiblatt, eine Fusspunktkurve in Bezug auf einen Punkt des der Hypocykloide eingeschriebenen Kreises C^2, hat *Longchamps* behandelt und ihm den Namen gegeben.

Ausführlicher wurden das regelmässige und das schiefe Dreiblatt von *Brocard*[3]) behandelt.

Man kann das regelmässige Dreiblatt auf sehr einfache Weise zeichnen. Von der Hypocykloide wissen wir, dass man ihre Punkte erhält, wenn man die Gerade SM über M hinaus um sich selbst verlängert (Fig. 6). Trägt man nun die Strecke SM nach der anderen Seite ab, so erhält man die Punkte des Dreiblattes, einer Kurve vierter Ordnung mit drei Knoten und drei Symmetrieaxen, die denen der Hypocykloide entsprechen.

Auch diese Kurve ist vielseitig untersucht worden. (Vgl. *Loria*, a. a. O. 155).

Ferner ist *Binder*[4]) bei der unter D. VI. Seite 61 angeführten Aufgabe auf sie geführt worden.

---

1) Nouv. Corr. Math. 1 (1874) pag. 124.

2) Mathes. 8 (1898) p. 5—10.

3) J. de math. spéc. (3) 5 (1890) p. 32—42, ferner Notes de bibliographie des courbes géométriques (Bar le Duc 1897/99) u. Interméd. Math. III (1896) p. 166—168. [II].

4) Wien. Ber. 106 IIa (1897) p. 295—322.

Eine andere Polarkurve hat *L. Ellenson*[1]) behandelt, nämlich die reziproke Polare in Bezug auf den Kreis durch die drei Spitzen der Hypocykloide. Diese Polare besitzt entsprechend den drei durch den Mittelpunkt der Hypocykloide gehenden Rückkehrtangenten drei Inflexionspunkte im Unendlichen. Sie besteht aus drei kongruenten hyperbolischen Aesten, deren Asymptoten, zugleich Wendetangenten der Inflexionspunkte, Tangenten des Grundkreises in den Spitzen der Hypocykloide sind. Sie hat den Mittelpunkt des Grundkreises als isolierten Doppelpunkt und ist (nach dem Dualitätsgesetz, das man hier anwenden kann) dritter Ordnung und vierter Klasse. Ihre Gleichungen lauten $\xi = \frac{9\,r \sin\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{3\vartheta}{2}}$, $\eta = \frac{9\,r \cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin\frac{3\vartheta}{2}}$. Ihre *Hesse*sche Kurve ist die reziproke Polare derjenigen Hypocykloide mit drei Rückkehrpunkten, deren Spitzen in den Scheiteln der ersten Hypocykloide liegen. Der Inhalt der aus drei unendlich langen Streifen bestehenden Fläche der reziproken Polaren unserer Kurve ist $F = 27\,r^2 \sqrt{3}$.

Noch eine aus der Hypocykloide abgeleitete Kurve hat *R. Blum*[2]) in der schon angeführten Arbeit gegeben, nämlich die Berührungspunktkurve einer Schar von Hypocykloiden. Unter der Berührungspunktkurve einer Kurvenschar wird der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Tangenten verstanden, die man von einem festen Punkte, dem Pole, an die einzelnen Kurven der Schar ziehen kann. Die betrachtete Schar wird erhalten, indem man die Hypocykloide sich um ihren Mittelpunkt drehen lässt. Die Entfernung des Poles P vom Mittelpunkte O sei b. Die Lösung wird analytisch durchgeführt, indem die Gleichung der Tangente für die Anfangslage und für eine benachbarte Lage aufgestellt und durch Einsetzen der Koordinaten von P ausgedrückt wird, dass die

---

[1]) Die reciproken Polarkurven der Epi- und Hypocykloiden. Diss. Bern 1899.

[2]) Schulpr. Wilh. Realsch. Stuttgart 1902.

Tangenten durch P gehen. Für die gesuchte Kurve ergibt sich dann:

$$(x^2 + y^2 - 9\,r^2)\left\{x^2 + (y - b)^2\right\} + 8\,b^2 x = o.$$

Interessant ist, dass durch Aufsuchen der negativen Fusspunktkurven, d. h. derjenigen Kurven, deren Fusspunktkurven die Berührungspunktkurven sind, sich Kegelschnitte ergeben. Der je nach der Lage des Pols ausserhalb oder innerhalb des Scheitelkreises, also hier des Rollkreises, bestimmte Kegelschnitt ist eine Ellipse oder Hyperbel.

In der schon oben genannten Abhandlung beschäftigt sich *J. Neuberg*[1]) mit den von *Longchamps* und *Brocard* studierten Fusspunktkurven der Hypocykloide. Durch eine einfache Ueberlegung können in gewisser Weise alle Fusspunktlinien auf die des Mittelpunkts des dreifach berührenden Kreises, das regelmässige Dreiblatt $\rho = r \cdot \cos 3\,\varphi$ zurückgeführt werden. *Neuberg* gibt dann sehr hübsche Konstruktionen für das gerade und schiefe Dreiblatt.

---

[1]) Liège Mem. 1906.

Anhang

abgedruckt aus Crelle Bd. 53 (1857) S. 231–237.
Gesammelte Werke, Bd. 2 (1882), S. 639—647.

(vgl. dazu Fig. 14.)

Über eine besondere Kurve dritter Klasse (und vierten Grades).

Von **J. Steiner.**

(Vorgetragen in der physikalisch-mathematischen Klasse der Akademie zu Berlin, 7. Januar 1856.)

Die Kurve tritt schon beim geradlinigen Dreieck ein. *Fällt man aus jedem Punkte in der dem Dreieck umschriebenen Kreislinie auf die Seiten Perpendikel, so liegen die je drei Fusspunkte allemal in irgend einer Geraden* G, *und die Enveloppe aller dieser Geraden ist eine Kurve dritter Klasse,* G^3, *und vierten Grades, welche die im Unendlichen liegende Gerade* G_∞ *zur ideellen Doppeltangente hat; ferner hat sie drei Rückkehrpunkte und die drei Rückkehrtangenten schneiden sich in einem und demselben Punkte.* Die Kurve berührt namentlich auch die Seiten des Dreiecks, sowie dessen drei Höhen, d. h. die aus den Ecken auf die Gegenseiten gefällten Lote.

Sei a b c das gegebene Dreieck; δ der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises δ^2; ferner a $\mathfrak{a}$, b $\mathfrak{b}$, c $\mathfrak{c}$ seine drei Höhen und d der gemeinsame Schnittpunkt derselben; seien ferner α, β, γ die Mitten der Seiten und m der Mittelpunkt des durch diese Mitten und zugleich auch durch die Fusspunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ der Höhen gehenden Kreises m^2; endlich sei r der Radius dieses Kreises; derselbe ist halb so gross als der Radius des Kreises δ^2. Da der Punkt m in der Mitte zwischen δ und d liegt, so ist d der äussere Ähnlichkeitspunkt beider Kreise. *Wird von den über den Seiten des Dreiecks liegenden Bogen des*

Kreises m^2, $\alpha\,\mathfrak{a}$, $\beta\,\mathfrak{b}$, $\gamma\,\mathfrak{c}$, *von den Mitten der Seiten aus, mittels der Punkte* u, v, w, *je ein Drittel abgeschnitten, sodass Bogen* $\alpha\,u = \frac{1}{3}\,\alpha\,\mathfrak{a}$, $\beta\,v = \frac{1}{3}\,\beta\,\mathfrak{b}$, $\gamma\,w = \frac{1}{3}\,\gamma\,\mathfrak{c}$, *so teilen diese Punkte die ganze Kreislinie in drei gleiche Teile, sodass sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks* u, v, w *sind.*

Ist p ein beliebiger Punkt in der Kreislinie δ^2 und G die ihm zugehörige Fusspunktenlinie, *so hat der aus dem Höhenschnitt* d *nach* p *gezogene Strahl* d p *seine Mitte, etwa* μ, *allemal in* G *und zugleich im Kreise* m^2; dieser Kreis werde von G zum zweiten Male in s geschnitten; der Punkt μ wird *Mittelpunkt* und s *Scheitel* der Fusspunktlinie G genannt. Im Kreise δ^2 sei p_1 der Gegenpunkt von p, *so steht dessen Fusspunktlinie* G_1 *jedesmal auf* G *senkrecht,* und zwar haben beide den Scheitel s gemein und ihre Mittelpunkte μ und μ_1 sind gleicherweise Gegenpunkte im Kreise m^2, und die Durchmesser $p\,p_1$ und $\mu\,\mu_1$ sind parallel. *Demnach sind die Fusspunktlinien oder die Tangenten der Kurve* G^3 *paarweise zu einander rechtwinklig, auf jeder steht eine — aber nur eine einzige — bestimmte andere rechtwinklig, und der Ort der Scheitel* s *aller dieser rechten Winkel ist die Kreislinie* m^2. Diese Eigenschaft hat also die Kurve mit den Kegelschnitten gemein. Solche rechtwinklige Tangentenpaare sind namentlich auch die Seiten und zugehörigen Höhen des gegebenen Dreiecks. Jede zwei zueinander senkrechte Fusspunktlinien heissen schlechthin *ein Paar.*

Jede Fusspunktlinie G_2 ($= G$) *wird von jedem Paar in zwei solchen Punkten geschnitten, welche gleichweit von ihrem Mittelpunkte* μ_2 *abstehen, eine Folge davon ist: dass* G_2 *von der Kurve* G^3 *in demjenigen Punkte* t_2 *berührt wird, welcher von ihrem Mittelpunkt ebenso weit absteht, als ihr Scheitel* s_2, *also* $\mu_2\,t_2 = \mu_2\,s_2$. Es folgen ferner nachstehende interessante Eigenschaften. *Die Gerade, welche durch die Berührungspunkte* t, t_1 *irgend eines Paares* $G\,G_1$ *geht, ist stets auch eine Fusspunktlinie* G_2, *und diejenige, die mit ihr ein Paar bildet, geht jedesmal durch den Scheitel jenes Paares; zudem hat die Berührungssehne* $t\,t_1$ *konstante Länge, nämlich sie ist dem vierfachen Radius des Kreises* m^2 *gleich,* $t\,t_1 = 4\,r$. Oder umgekehrt: *Die Kurve* G^3 *schneidet*

jede ihrer Tangenten G_2 *in zwei solchen Punkten* t *und* t_1, *deren Abstand von einander konstant, und zwar dem Durchmesser des Kreises* δ^2, *oder dem doppelten Durchmesser des Kreises* m^2 *gleich ist; und die Tangenten in solchen zwei Schnittpunkten sind je ein Paar* G G_1. *Die in den Schnitten* t *und* t_1 *und in dem Berührungspunkte* t_2 *jeder Tangente* G_2 *auf die Kurve* G^3 *errichteten drei Normalen treffen sich allemal in irgend einem Punkte* q *und der Ort dieses Punktes ist ein Kreis* $[m]^2$, *der mit dem Kreise* m^2 *konzentrisch ist und einen dreimal so grossen Radius hat, als dieser. Die Kurve* G^3 *berührt den Kreis* m^2 *in den oben genannten drei Punkten* u, v, w *und hat dieselben zu Scheiteln. In diesen Punkten bilden die zugehörigen Tangenten, etwa* U, V, W *und die Kreisdurchmesser* U_1, V_1, W_1 *mit einander Paare; jene sind die einzigen drei Fusspunktlinien, bei welchen der Scheitel* (s), *Mittelpunkt* (μ) *und Berührungspunkt* (t) *vereint sind, die anderen haben die Punkte* u, v, w *zu Scheiteln, deren Gegenpunkte* u_1, v_1, w_1 *(im Kreise* m^2*) zu Mittelpunkten, und um die Länge des Durchmessers über diese hinaus ihre Berührungspunkte* u_2, v_2, w_2. *Diese letzteren Punkte sind die drei Rückkehrpunkte der Kurve* G^3 *und* U_1, V_1, W_1 *sind die Rückkehrtangenten, die also alle drei durch den Mittelpunkt* m *des Kreises gehen, gleich lang sind, nämlich* $m\,u_2 = m\,v_2 = m\,w_2 = 3\,r$ *und mit einander gleiche Winkel* ($= 128^0$) *bilden, sodass die drei Rückkehrpunkte* u_2, v_2, w_2 *im oben genannten Kreise* $[m]^2$ *liegen und die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind, das* m *zum Schwerpunkt hat; auch sind die drei Rückkehrtangenten zugleich Normalen der Kurve in ihren Scheiteln* u, v, w *und es ist* $u\,u_2 = v\,v_2 = w\,w_2 = 4r$. Der reelle Teil der Kurve G_3 besteht nur aus einem regelmässigen Kurven-Dreieck u_2, v_2, w_2, das innerhalb des geradlinigen Dreiecks u_2, v_2, w_2 liegt, aber den Kreis m^2 umschliesst. Seine drei gleichen Seiten $u_2\,w\,v_2$, $v_2\,u\,w_2$, $w_2\,v\,u_2$ sind nach innen konvex und *berühren den Kreis mit ihren Mitten (Scheiteln)* u, v, w; *die Länge jeder Seite ist* $= 5\,{}^1/_3\,r$, *somit der ganze Umfang* $= 16\,r$; *der Inhalt des Kurvendreieckes ist* $= 2\,\pi\,r^2$, *also gerade zweimal so gross, als die Kreisfläche* m^2, *so dass jeder der drei gleichen, zwischen dem Kreise und der Kurve liegenden Arbelen* $= \frac{1}{3}\,r^2\,\pi$ *ist. Jede Tangente der Kurve* G^3 *berührt je*

einen ihrer drei Zweige und schneidet die beiden andern; ein Paar $G\,G_1$, *d. h. die Schenkel eines ihr umschriebenen rechten Winkels berühren immer verschiedene Zweige.*

Sind $G\,G_1$ und $H\,H_1$ irgend zwei Paare, wird G von H und H_1 bezw. in a_1, d_1 und G_1 von denselben in b_1, c_1 geschnitten, so sind die Geraden $a_1\,c_1$, $b_1\,d_1$ allemal ein drittes Paar $J\,J_1$, d. h. sie sind auch zu einander rechtwinklige Fusspunktlinien oder Tangenten der Kurve G^3. Ein eben solches Tripel von drei Paaren $G\,G_1$, $H\,H_1$, $J\,J_1$, mit einem Quadrupel von vier Schnittpunkten a, b, c, d bilden auch die Seiten und zugehörigen Höhen des gegebenen Dreiecks; beiderseits hat man ein vollständiges Viereck ($a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ oder abcd), dessen drei Paar Gegenseiten zu einander senkrecht sind, oder vier solche Punkte, von denen jeder der Höhenschnitt des durch die drei übrigen bestimmten Dreiecks ist. *Bei allen diesen Vierecken ist die Summe der Quadrate der Gegenseiten konstant, und zwar* $= 16\,r^2$; *also* $\overline{ad}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{bd}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2 = 16\,r^2$. *Alle Quadrupel* abcd, *deren vier Punkte sämtlich reell sind, liegen innerhalb des Kurvendreiecks* G^3; und umgekehrt *durch jeden innerhalb dieses Dreieks liegenden Punkt* d *ist ein reelles Quadrupel bestimmt,* denn es gehen immer drei reelle Tangenten G_1, H_1, J_1 durch denselben, und die zu diesen senkrechten Tangenten G, H, J sind ihre Gegenseiten in einem vollständigen Viereck abcd. *Liegt hingegen der gegebene Punkt* d *ausserhalb des Kurvendreiecks* G^3, *so geht nur eine reelle Tangente, etwa* G *durch ihn, und alsdann ist von den anderen drei Punkten nur einer, etwa* a, *reell, der gleichfalls in* G *und auf der andern Seite ausserhalb der Kurve liegt; die konjugierte Tangente* G_1 *ist auch reell und enthält die zwei imaginären Punkte b und c; die beiden andern Paare* $H\,H_1$ *und* $J\,J_1$ *sind imaginär. Die den vier Dreiecken* abc, abd, acd, bcd *umschriebenen Kreise, deren Mittelpunkt bezw.* $\delta, \gamma, \beta, \alpha$ *heissen sollen, sind gleich und bei allen Quadrupeln von gleicher Grösse, nämlich der Radius eines jeden ist dem Durchmesser des Kreises* m^2 *gleich, also* $= 2\,r$. *Das Viereck* $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ *ist dem Viereck* a b c d *gleich und liegt so, dass die vier Geraden* $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ *alle durch den Mittelpunkt* m *gehen und durch ihn gehälftet werden; daher haben umgekehrt die den vier Dreiecken*

$\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta\delta$, $\alpha\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta$ umschriebenen Kreise ihre Mittelpunkte in d, c, b, a *und ihre Radien sind ebenfalls* $= 2r$; *und ferner sind die Gegenseiten $\alpha\delta$ und $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$ und $\beta\delta$, $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ zu einander rechtwinklig, oder bilden drei Paare $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}\,\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{J}\,\mathfrak{J}_1$, deren Scheitel im nämlichen Kreise* m^2 *liegen, und deren Enveloppe eine der vorigen,* G^3, *gleiche Kurve* $\mathfrak{G}^3$ *ist, aber um den Mittelpunkt* m *um 180^0 herumbewegt, so dass sie den Kreis in den oben erwähnten Punkten* u_1, v_1, w_1 *berührt. Alle reellen Quadrupel $\alpha\beta\gamma\delta$ liegen innerhalb des Kurvendreiecks* $\mathfrak{G}^3$. *Enthält das Quadrupel* abcd *zwei imaginäre Punkte* b *und* c, *so sind die den Dreiecken* adc *und* adb *umschriebenen Kreise* β^2 *und* γ^2, *sowie ihre Mittelpunkte β und γ imaginär, wogegen die den Dreiecken* abc *und* bcd *umschriebenen Kreise* δ^2 *und* α^2 *sammt ihren Mittelpunkten δ und α reell bleiben, diese letzteren jedoch ausserhalb des Kurvendreiecks* $\mathfrak{G}^3$ *liegen.*

Durch jedes Quadrupel abcd geht ein Büschel gleichseitige Hyperbeln B (H^2); *die verschiedenen Paare Asymptoten derselben bestehen aus den gesammten vorgenannten Paaren* $G\,G_1$ *und sind somit Tangenten der nämlichen Kurve* G^3. Oder in Bezug auf das Dreieck abc kann man sagen: *jede Fusspunktlinie* G *sei Asymptote einer ihm umschriebenen gleichseitigen Hyperbel* H^2, *welche notwendig auch durch den Höhenschnitt* d *geht und den Scheitel* s *von* G *zum Mittelpunkt hat.* In Betracht aller Quadrupel abcd hat man auf diese Weise eine Schaar-Schaar gleichseitige Hyperbeln, S S (H^2). Denkt man sich in Bezug auf jedes Paar $G\,G_1$ alle Hyperbeln, welche dasselbe zu Asymptoten haben, so hat man die nämliche S S (H^2).

Je zwei dieser Hyperbeln schneiden sich in irgend einem Quadrupel, also nur innerhalb des Kurvendreiecks G^2, *wofern ihre Schnittpunkte alle vier reell sind; berühren sich dieselben, indem etwa* a *und* d *sich vereinen, so berühren sie zugleich auch die Gerade* ad $=$ G *in deren Mittelpunkt μ, und alsdann liegen die beiden anderen Schnitte* b *und* c *in der Kurve* G^3 *selbst und sind die Berührungspunkte eines Paares* $H\,H_1$, *dessen Scheitel in jenem Punkte μ liegt. Je zwei Quadrupel liegen in einer und derselben Hyperbel* H^2, *oder insbesondere in einem und demselben Paar* $G\,G_1$. Die Rechtecke unter den je zwei Perpendikeln,

welche aus den einzelnen Punkten irgend eines Quadrupels auf ein beliebiges Paar $G G_1$ gefällt werden, haben jedesmal unter sich gleichen Inhalt. *Sind in einer Ebene zwei rechte Winkel* $G G_1$ und $H H_1$ *gegeben, sollen zwei Hyperbeln die Schenkel derselben bezw. zu Asymptoten haben und einander berühren, so ist der Ort ihres Berührungspunktes* μ *ein bestimmter Kreis* m^2, *welcher durch die Scheitel der Winkel und durch die Mitten der Strecken geht, welche auf den Schenkeln jedes Winkels durch die Schenkel des andern begrenzt werden.* Das System der Paare $G G_1$ kann insbesondere auch wie folgt bestimmt werden:

Wird in der Kreislinie m^2 irgend ein Punkt p und nebstdem eine beliebige Gerade $\mathfrak{Q}$ angenommen, und werden sodann aus jedem Punkte s des Kreises zwei unbegrenzte Gerade P und Q bezw. durch p und parallel $\mathfrak{Q}$ gezogen und die von denselben gebildeten Nebenwinkel mittels zweier Geraden G und G_1 gehälftet, *so sind alle diese Geradenpaare* $G G_1$ *ein dem obigen gleiches System, so dass sie eine gleiche Kurve* G^3 *umhüllen.*

In dem Kreise m^2 ziehe man eine fortlaufende Reihe Sehnen unter folgender Bedingung: Aus dem Anfangspunkt s zieht man die erste Sehne ss_1 willkürlich; sodann aus s_1 die zweite Sehne $s_1 s_2$ senkrecht auf den durch s gehenden Durchmesser, ferner aus s_2 die dritte Sehne $s_2 s_3$ senkrecht zu dem durch s_1 gehenden Durchmesser und so durch jeden neuen Punkt diejenige Sehne, welche zu dem durch den vorhergehenden Punkt gezogenen Durchmesser senkrecht ist, so entsteht — wenn nicht zufällig der über der ersten Sehne liegende Bogen mit dem Kreisumfange kommensurabel ist — eine unbegrenzte Reihe von Sehnen, welche sämmtlich eine der obigen gleiche Kurve berühren. Wird auf jede Sehne in ihrem zweiten Endpunkte eine Senkrechte errichtet, so berühren auch diese Senkrechten alle die nämliche Kurve und bilden mit den respektiven Sehnen die obigen Paare $G G_1$. Ist dagegen der Bogen über der ersten Sehne mit dem Kreisumfange kommensurabel, verhält er sich zu diesem, wie n : m, wo n und m ganze und relative Primzahlen sind, *so schliesst sich die Reihe Sehnen jedesmal, so dass ein geschlossenes Polygon entsteht;* jedoch kehrt die Reihe nicht immer in den Anfangspunkt s zurück, sondern

sie kann auch in s_1, s_2 . . . . zurückkehren, je nachdem die Zahl m beschaffen ist. Ferner sind in diesem Falle die Endpunkte s, s_1, s_2 . . . . der Sehnen immer Ecken eines regelmässigen m-Ecks, und die Sehnen selbst sind Seiten verschiedener Ordnung desselben (oder Seiten und Diagonalen).

Das Sehnenpolygon nimmt nur dann alle Ecken des m-*Ecks in Anspruch und ist selbst ein* m-*Eck, wenn* m *eine Potenz der Zahl* 3 *ist; seine Seiten sind alsdann zu drei und drei einander gleich und zwar sind sie Seiten des regelmässigen vollständigen* m-*Ecks von allen denjenigen Ordnungen, welche nicht durch* 3 *teilbar sind.* Nämlich bei einem regelmässigen vollständigen $(2\mu + 1)$-Eck hat man (nach Grösse) Seiten von 1, 2, 3 ter bis $(\mu - 1)$ ter Ordnung zu unterscheiden. *Hierbei berühren alle Sehnen gleicherweise eine Kurve* G^3, *sodass das Sehnenpolygon dieser Kurve um- und zugleich dem Kreise einbeschrieben ist.*

Es folgen daraus noch mehrere spezielle Sätze, die hier übergangen werden.

In Bezug auf das Obige ist die Kurve G^3 unter andern auch noch wie folgt bestimmt:

Denkt man sich rücksichtlich irgend eines der oben beschriebenen Quadrupel abcd die Schaar Kegelschnitte, welche durch einen der vier Punkte, etwa durch d, gehen und dem durch die drei übrigen bestimmten Dreiecke abc eingeschrieben sind, ferner in jedem Kegelschnitt, den durch den Punkt d gehenden Durchmesser $d\,d_1$ und in dessen anderm Endpunkte d_1 die Tangente G des Kegelschnittes, *so ist die Enveloppe aller dieser Tangenten die dort betrachtete Kurve* G^3, *und zwar für alle unzähligen Quadrupel stets die nämliche Kurve.* Auf diese Eigenschaft wurde der Verfasser durch seinen Freund, den Professor *Schläfli* in Bern, aufmerksam gemacht. Die Kurve G^3 wird ferner auch durch rollende Bewegung erzeugt.

Analogerweise gelangt man zu etwas allgemeineren Sätzen, wobei der obige Kreis m^2 durch einen beliebigen Kegelschnitt vertreten wird, und wobei die Gegenseiten der vollständigen Vierecke abcd nicht mehr zu einander rechtwinkelig sind. Folgendes Beispiel möge hier genügen:

Sind $m s$ *und* $m \mu$ *zwei beliebige Halbmesser einer gegebenen Ellipse* m^2 *und bewegen sich dieselben gleichzeitig um den Mittelpunkt* m *nach entgegengesetzten Richtungen, so dass der vom Halbmesser* $m s$ *beschriebene Sektor in jedem Moment doppelt so gross ist, als der vom andern,* $m \mu$ *beschriebene Sektor, so ist die Enveloppe der durch die Endpunkte der Halbmesser gehenden Geraden* $s \mu = G$, *eine Kurve dritter Klasse* G^3 *und vierten Grades, welche die Gerade* G_{∞} *zu ideellen Doppeltangenten hat, und deren reeller Teil nur aus einem krummlinigen Dreieck* $u_2 \, v_2 \, w_2$ *besteht, welches die Ellipse umschliesst und sie mit seinen drei Seiten (Bogen) in drei solchen Punkten* u, v, w *berührt, welche die Ecken eines der Ellipse eingeschriebenen grössten Dreiecks sind; die Ecken jenes Dreiecks* $w_2 \, v_2 \, w_2$ *sind Rückkehrpunkte der Kurve* G^3, *die Rückkehrtangenten gehen alle drei durch den Mittelpunkt der Ellipse und respektive durch die genannten Berührungspunkte* u, v, w; *bis zu diesem Punkte genommen sind sie gerade doppelt so gross, als die auf ihm liegenden Durchmesser der Ellipse. Der Inhalt des Kurvendreiecks ist zweimal so gross als die Fläche der Ellipse, und jeder der drei Arbelen zwischen beiden Kurven ist einem Dritteil der Ellipsenfläche gleich.*

Alphabetisches Namenverzeichnis.

		Seite
Bücking	Arch. d. Math. (2) 16 (1898) p. 271—319. *Die Seitensymmetriegeraden des Dreiecks; als besonderer Fall die Steinersche Kurve des Dreiecks*	61
Burmester	Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1897	17, 22, 26, 78
Cahen Ch. Ph.	Nouv. Ann. (2) 14 (1875) p. 21—31. *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements*	42
v. Cardinal	Polyt. Journ. 35 (1830) p. 329—332. *Über Anwendung und Zeichnung der Cykloide, Epicykloide und Hypocykloide*	77
Cayley	Quart. Journ. 9 (1868) p. 31—41 u. 175—176. *On a certain envelope depending on a triangle inscribed in a circle*	35
Chasles	Gesch. d. Geom., übers. von Sohnke, Halle 1839	8
Cesàro E.	Nouv. Ann. (3) 7 (1888) p. 171—190 u. 9 (1890) p. 143. *Remarques sur la théorie des roulettes*	17
Clebsch A	Crelle J. 64 (1864) p. 124. *Note zur Abhandlung Cremonas*	47, 71
Cremona L.	Crelle 64 (1864) p. 101—123. *Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* . . . . *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane Bologua 1862*	24, 46, 69, 74
Dörholt K.	[I] Dissert., Münster 1884. *Über einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte* . . .	73
	[II] Schulpr., Gymnas. Rheine 1891. *Die Enveloppe der Axen der einem Dreieck eingeschriebenen Parabeln*	53, 58
Dürer A.	Vgl. W. Dyck und S. Günther	76
Duporcq E.	Nouv. Ann. (4) 1 (1901) p. 168—171. *Sur l'hypocykloide à trois rebroussements*	6
Dyck, W.	Katalog mathematischer und mathem.-physik. Modelle, Apparate u. Instrumente, im Auftrage der Deutschen Mathem.-Vereinigung herausgegeben München 1892, p. 54—88 .	76, 77
Eckardt J. E. F.	Zeitschr. f. Math. u. Phys. 15 (1870) p. 129—134. *Einige Sätze über die Epi- und Hypocykloiden*	25, 74
	und 18 (1873) p. 322.	5
Ellenson L.	Dissert., Bern 1899. *Die reciproken Polarkurven der Epi- und Hypcykloiden*	81
Ellis J. C.	Proc. Cambr. Phil. Soc. 2 (1864—76) p. 256—260. *A machine for tracing curves*	77
Euler	Acta Acad. Sc. Imp. Petrop. I 1781 p 48. *De duplici genesi tam epicykloidum quam hypocykloidum*	3
Ferres N. M.	Quart. J. 8 (1867) p. 209, 9 (1868) p. 147. *Investigation of the envelope of straight line joining*	

		Seite
	the feet of the perpendiculars let fall on the sides of a triangle from any position in the circumference of the circumscribed circle . .	33
Feuerbach	Eigensch. merkw. Pkte. d. Dreiecks, Nürnberg 1822	55
Fiedler W.	Viertelj.-Schr. d. naturf. Ges., Zürich 30 (1885) p. 390. *Über die Büschel gleichseitiger Hyperbeln, den Feuerbachschen Kreis und die Steinersche Hypocykloide*	29, 54
Fouret	[I] Nouv. Ann. (2) 8 (1869) p. 162. *Sur la double génération des épicycloïdes planes* . . . . . [II] L'Instit. J. univ. d. Sc. Soc. Phil. 36 (1868) I p. 182	13
Frahm W.	Zeitschr. f. Math. u. Phys. (1873) p. 363—387. *Über die Erzeugung der Kurven dritter Klasse und vierter Ordnung*	51
Fréchet M.	Nouv. Ann. (4) 2 (1902) p. 206. *Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois rebroussements.*	64
Gildemeister S. H.	Dissert., Marburg 1866. *De lineis curvis Epicycloidibus et Hypocycloidibus*	12
Gob A.	Liège Mém. (3) { 4 (1902) / 6 (1906) } *Note sur l'hypoc. à trois rebroussements*	28, 39, 43, 65
Godt W.	Jahresb. d. Deutsch. Math. Ver. 4 (1896) p. 161—162. *Über den Feuerbachschen Kreis und die Steinersche Kurve 4. Ordnung u. 3. Klasse* .	69
Graf J. H.	Briefwechsel Steiner-Schläfli. Bern 1896 . . .	30
Greer H.	Quart. J. 7 (1866) p. 70. *The geometry of the triangle: on the equation of a certain envelope*	32
Griffith J.	Quart. J. { 9 (1868) p. 364. / 10 (1869) p. 229. } *A short method of finding the equation to a certain envelope depending on a triangle inscribed in circle*	34
Günther S.	Bibl. math. von *Enneström* 1886 p. 139. *Albrecht Dürer, einer der Begründer der modernen Kurvenlehre*	76
van Hengel J.	Dissert., Rostock 1870. *Über Cykloiden*	13
Hennig R.	Crelle 65 (1866) p. 52—61. *Beitrag zur Theorie der ebenen Rouletten*	13
de la Hire	Mém. de math. et ph., Paris 1694 p. 10—47. *Traité des épicycloïdes et leur usage dans les méchaniques*	3
Holst E.	Arch. for Math. og Naturv. 6 (1882, Cristiania) p. 125—152. *Über algebraische cyklische Kurven*	16
Humbert G.	{ Nouv. Ann. (3) 12 (1893) p. 37. / Amer. J. of Math. 10 (1888) p. 258. } *Sur l'orientation des systèmes de droites*	66

		Seite
Ruffini F. P.	Bol. Rend. (2) 5 (1900/01) p. 13. *Della ipocicloide trienspide*	63
Rupp O.	Monatsh. f. Math. 4 (1893) p. 135—146. *Über die mit der Parabelschar zusammenhängenden Steinerschen Hypocykloiden*	58
Salmon	Anal. Geom. d. höh. eb. Kurven, 2. Aufl. 1882 .	15, 39, 53
Scheffers G.	Encykl. d. math. Wissensch. Bd. 3, D 4, 1903 .	2
Schilling F.	[I] Zeitschr. f. Math. u. Phys. { 44 (1899) 214—227. 51 (1904) p. 1—49. *Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven*	3, 23, 78
	[II] { Ztsch. f. Math. u. Phys.5 4. (1907) p. 281 . . Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Ver. 11 (1902) p. 267—269. . . . . }	18
Schlömilch O.	Zeitschr. f. Math. u. Phys. 2 (1857) p. 330—334. *Rektification und Transposition von Kreisbögen, sowie über die Konstruktion der cykl. Kurven*	(9), 11, (78)
Schotten H.	Dissert., Marburg 1883. *Über einige bemerkenswerte Gattungen der Hypocykloiden*	39
Sée R.	Nouv. Ann. (3) 14 (1895) p. 272—280. *Problème du concours générale de 1894*	59
Serret P.	[I] Nouv. Ann (2) 9 (1870) p. 73—84. *Sur un théorème de M. Ferrers*	29, 41, 51
	[II] Compt. Rend. { 123 (1896) p. 396—415. 442—461. 125 (1897) p. 404, 423, 445. *Sur l'hypocycloïde de Steiner*	73
Servois	Ann. de Math. de Gergonne 4 (1813) p. 251.	6
Schröter H.	Crelle 54 (1857) p. 31. *Über die Erzeugnisse krummer projektivischer Gebilde*	6, 44
Siebeck	Crelle 66 (1866) p. 344. *Über die Erzeugung der Kurven 3. Klasse und 4. Ordnung durch Bewegung eines Punktes*	48, (51)
Sohnke	Aufg.-Sammlg. (1906) p. 195	76
Steiner J.	{ Crelle 53 (1857) p. 231. *Über eine besondere Kurve dritter Klasse und vierten Grades* . . . . . Ges. Werke II. p. 639 . . . . }	1, 5, 23, 29, 69, 83
	{ Crelle 55 (1858) bes p. 371 aus: *Vermischte Sätze und Aufgaben* . . . . Ges. Werke II p. 678, 679 . . . . }	44
Stiner G.	[I] Monatsh. f. Math. 6 (1895) p. 372. *Zur Konstruktion der Steinerschen Hypocykloide* . .	60
	[II] Schulpr. St. Gallische Kantonsch. 1898 *Die*	

		Seite
	dreimal berührenden Ellipsen der Steinerschen Hypocykloide	75
Suardi	Conte Gianbattista (vgl. Dyck)	76
Thallmayer V.	Polyt. Journ. 228 (1878) p. 312—314. *Apparat zum Anreissen von Epicykloiden und Hypocykloiden*	77
Trebitscher M.	Wien. Ber. 81 (1882). *Über Beziehungen zwischen Kegelschnittbündeln und rationalen Kurven 3. Klasse*	52
Tschummi J	Dissert., Bern 1892. *Ein Beitrag zur Geschichte und Discussion der Cykloiden*	13, 18, 29
Verdam G. J.	Arch. der Math. (1) 11 (1848) p. 13—25. *Note sur une manière particulière de déterminer les équations des lignes courbes, en faisant usage de la composition de vitesses, suivant les règles de la Dynamique*	4, 20
Vietor A.	Zeitschr. f. Math. u. Phys. 25 (1880) p. 263—271. *Die Polkreispaare einer Cykloide*	15
Walton	Quart. J. 9 (1869) p. 142—146. *On a certain envelope*	35
Weissenborn	Die cyklischen Curven, Eisenach 1856	8, 78
Weyr E.	Theorie d. mehrdeutigen Geom., Leipzig 1869 .	50
Wilson J.	Proc. R. Soc. Edinb. 9 (1876) p. 161—170 . . .	77
Wirtz C.	Diss., Strassburg 1900. *Die Steinersche Hypocykloide*	30, 63
Wölffing E.	Bibl. math. (3) 2 (1901) 235—259. *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre der cyklischen Curven*	2
	L'Interm. 5 (1898) p. 160. 6 (1899) p. 11—12	
Wolstenholme J.	Proc. Lond. Math. Soc. 4 (1873) p. 321—327. *On Epi- and hypocykloids*	26
Zehme W.	Element. und analyt. Behandlung d. Cykloiden. Iserlohn und Elberfeld 1854.	11

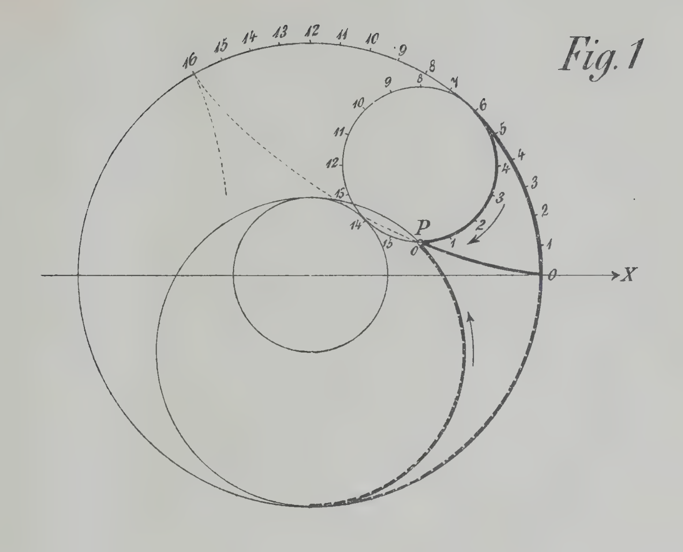
Am 20. November 1882 wurde ich, Willy Max Roegner, in Striegau in Schlesien als Sohn des Fabrikbesitzers Adolf Roegner geboren. Nachdem ich im Jahre 1902 auf dem Realgymnasium in Reichenbach in Schlesien die Abgangsprüfung bestanden hatte, genügte ich vom 1. April 1902 zunächst meiner Militärpflicht in Görlitz und studierte dann in Berlin, Göttingen und Jena reine und angewandte Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie. Meine Universitätslehrer waren die Herren Professoren und Doktoren

in Berlin: W. Förster, Frobenius, Gabriel, Harries, Lehmann-Filhés, J. Schur, H. A. Schwarz, Warburg; Paulsen, Schumann; Jaekel, Plate;

in Göttingen: Abraham, Ambronn, Dolezalek, Herglotz, Hilbert, Klein, Liebisch, Minkowski, Riecke, Runge, Schwarzschild, Voigt, Wiechert; Baumann, Husserl, Peipers; Friedrichsen, E. v. Hoffmann, R. Hoffmann, Rhumbler;

in Jena: Auerbach, Haussner, Knopf, Knorr, Linck, Rau, Thomae, Winkelmann; Eucken, Liebmann; Harms, Schultze.

Ich ergreife gern diese Gelegenheit, ihnen allen meinen herzlichsten Dank auszusprechen, insbesondere Herrn Professor Dr. Haussner.


Fig. 1
P
X
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

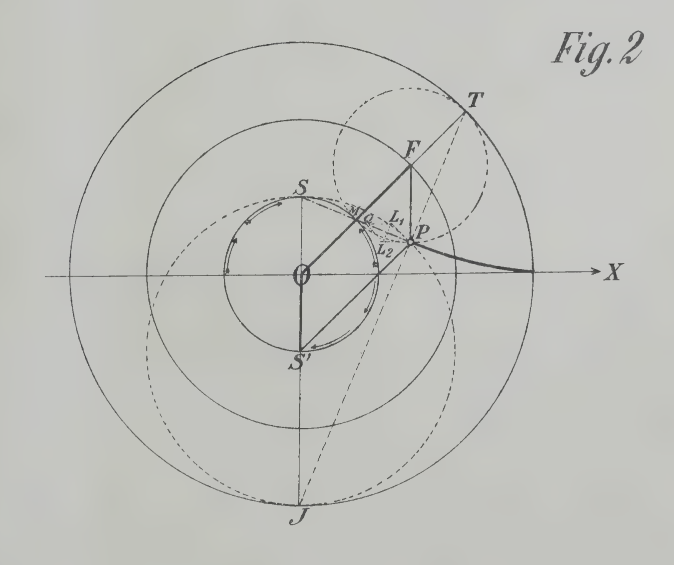
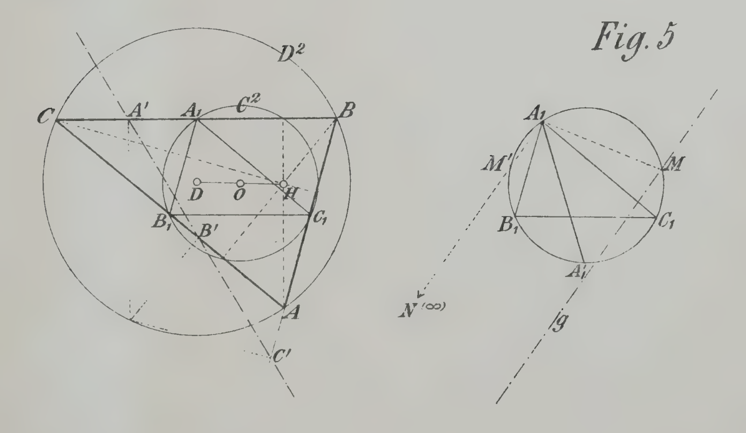

Fig. 2
T
F
S
M
Q
L_1
P
L_2
O
X
S'
J

Fig. 3

Fig. 4



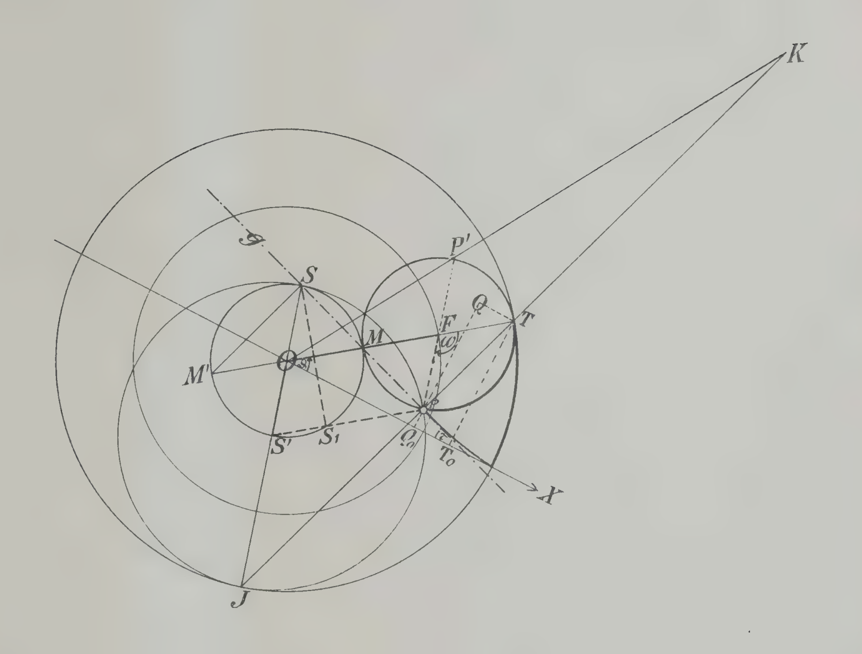


Fig. 6

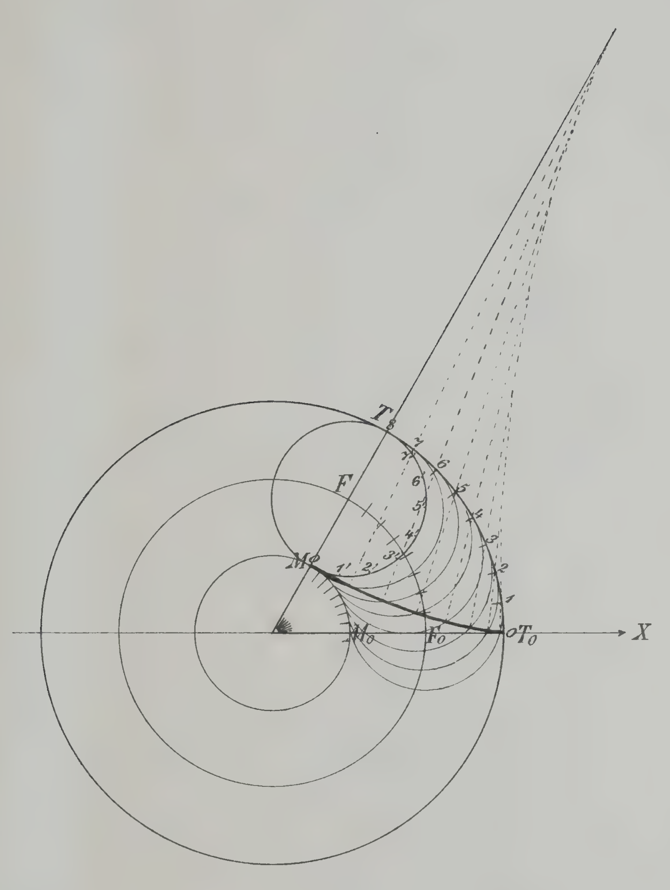


Fig. 7

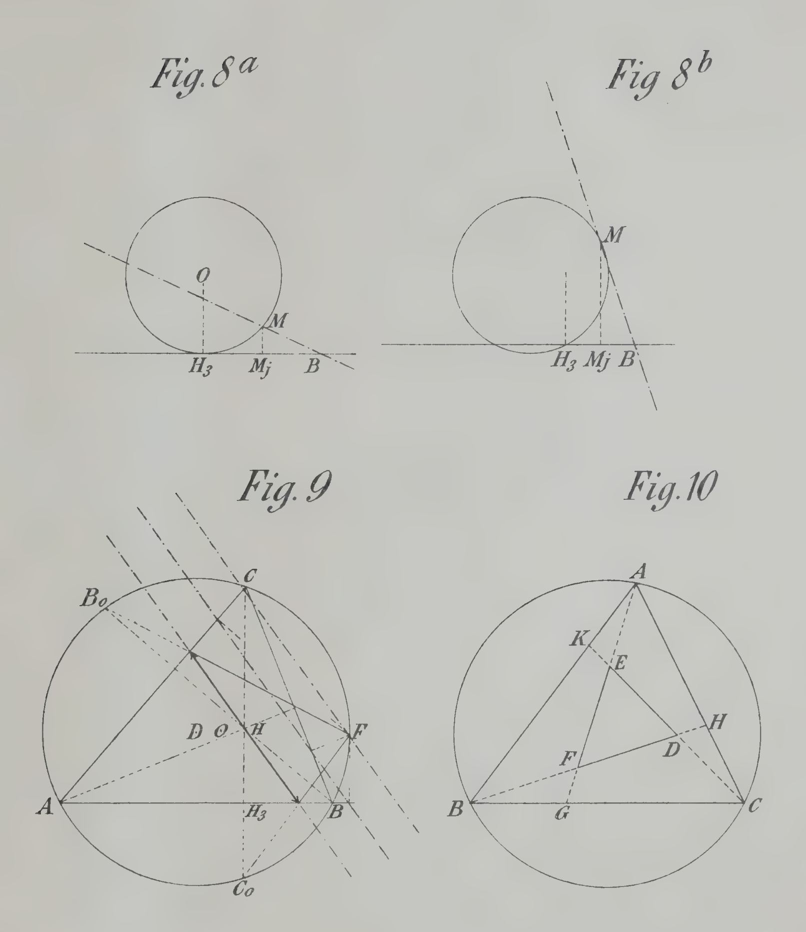
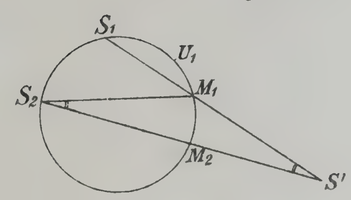


Fig. 8a
O
M
H3
Mj
B
Fig 8b
M
H3
Mj
B
Fig. 9
C
Bo
D
O
H
F
A
H3
B
Co
Fig. 10
A
K
E
H
F
D
B
G
C

Fig. 11



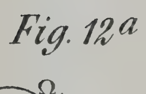


Fig. 12ª

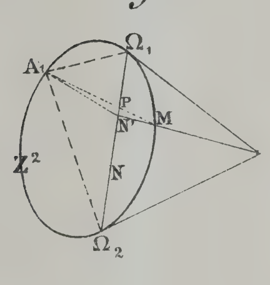


Fig. 12ᵇ

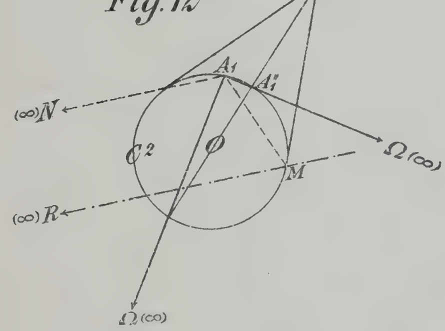


Fig. 13

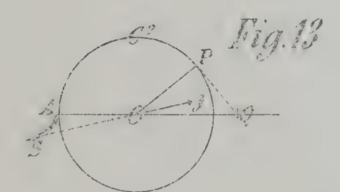


Fig. 14

